Conjuntos numéricos

En 1642 y a los 19 años, Blaise Pascal construyó una sencilla máquina aritmética para su padre, porque tenía que contar dinero en el trabajo. La máquina se servía de engranajes mecánicos para sumar (cifras de hasta ocho dígitos) y restar automáticamente. Unos años después el gran matemático Gottfried Leibniz perfeccionó el invento de Pascal y obtuvo un nuevo modelo que podía sumar, restar, multiplicar, dividir y calcular raíces cuadradas. Éste fue el punto de partida para las auténticas calculadoras, y finalmente para las computadoras.

La noción de número es tan antigua como el hombre mismo ya que son necesarios para resolver situaciones de la vida diaria. Por ejemplo, usamos números para **contar** una determinada cantidad de elementos (existen siete notas musicales, cinco continentes, etc.), para establecer un **orden** entre ciertas cosas (el tercer mes del año, el cuarto hijo, etc.), para establecer **medidas** (3,2 metros; 5,7 kg; –4 ºC; etc.), etc.

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES ($\mathbb{N}$)

$\mathbb{N}$ = { 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6;.....}

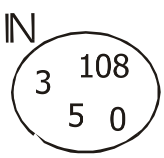
Los puntos sucesivos significan: «y así sucesivamente»

El conjunto de los Números Naturales surgió de la necesidad de contar, lo cual se manifiesta en el ser humano desde sus inicios.

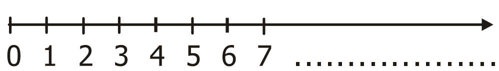
Este conjunto se caracteriza porque:

- Tiene un número **infinito** de elementos.
- Cada elemento tiene un **sucesor** y todos, **excepto el 0,** un **antecesor.**

Podemos graficar mediante un diagrama de Venn de la siguiente manera:



También podemos verlos como una serie de puntos alineados y equidistantes



Operemos con estos números:

3 + 1	=	4
4 - 3	=	1
3 - 4	=	?

Como llegamos a una operación que no podemos resolver. Es necesario extender este conjunto.

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS ($\mathbb{Z}$)

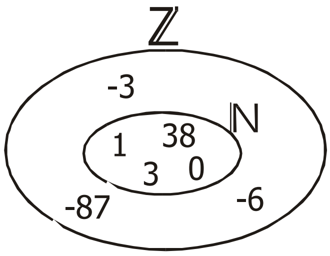
$\mathbb{Z}$ = { .....; –4; –3; -2; -1; 0; 1; 2; 3;.....}

El conjunto de los Números Enteros surge de la necesidad de dar solución general a la sustracción, pues cuando el sustraendo es mayor que el minuendo, esta sustracción no tiene solución en los Conjuntos Naturales (por ejemplo: 5 – 20 = ¿?).

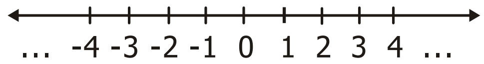
Debido a esto, la recta numérica se extiende hacia la izquierda, de modo que a cada punto que representa un número natural le corresponda un **punto simétrico**, situado a la izquierda del cero.

Punto simétrico es aquel que está ubicado a igual distancia del cero (uno a la derecha y el otro a la izquierda de él).

Podemos graficar mediante un diagrama de Venn de la siguiente manera:



También podemos verlos de la siguiente manera:



Operemos con estos números:

3 - 4	=	-1
4 x 3	=	12
6 ÷ 2	=	3
3 ÷ 2	=	?

Como llegamos a una operación que no podemos resolver. Es necesario extender este conjunto.

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES ($\mathbb{Q}$)

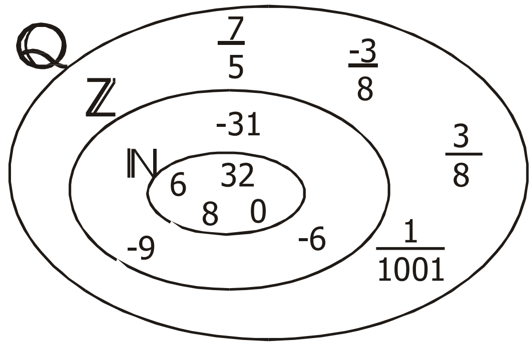
Un número es racional si y sólo si puede expresarse como división de dos números enteros, cuyo divisor es distinto de cero. Esta división se representa como fracción, donde el dividendo recibe el nombre de numerador y el divisor de denominador.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \ / \ a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0 \right\}$$

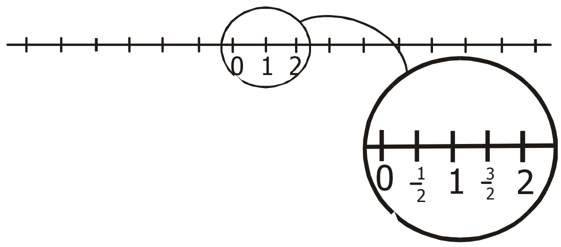
El conjunto de los Números Racionales se creó debido a las limitaciones de cálculo que se presentaban en el conjunto de los Números Naturales y Números Enteros.

Por ejemplo, sólo se puede dividir en el conjunto de los Números Enteros **si y sólo si** el **dividendo es múltiplo, distinto de cero, del divisor.** Para solucionar esta dificultad, se creó este conjunto, el cual está formado por todos los números de la forma $\frac{a}{b}$.

Podemos graficar mediante un diagrama de Venn de la siguiente manera:



También los podemos ver de la siguiente manera:



Operemos con estos números:

$\sqrt{4} = 2$; porque : $(2)^2 = 4$

$\sqrt{2} = ?$

Obviamente necesitamos crear un conjunto que agrupe este tipo de números.

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES ($\mathbb{I}$)

Los Números Irracionales son los que no se pueden expresar como racionales, es decir, que su parte decimal tenga infinitas cifras sin presentar periodo alguno.

Algunos ejemplos:

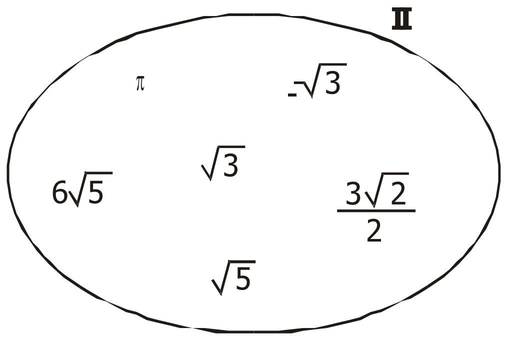
$\pi = 3{,}14159265358979323846...$

$\sqrt{2} = 1{,}414213562...$

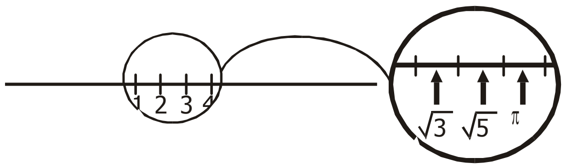
$-\sqrt{5} = -2{,}23606797...$

Este conjunto surgió de la necesidad de reunir a ciertos números que no pertenecen a los conjuntos anteriores; entre ellos se pueden citar a las **raíces inexactas, el número Pi,** etc. A él pertenecen todos los **números decimales infinitos puros**, es decir aquellos números que no pueden transformarse en una fracción. No deben confundirse con los números racionales, porque éstos son números decimales finitos, infinitos periódicos e infinitos semiperiódicos (o periódicos mixtos) que **sí pueden transformarse en una fracción.**

Podemos graficar mediante un diagrama de Venn de la siguiente manera:



Podemos graficar de la siguiente manera:

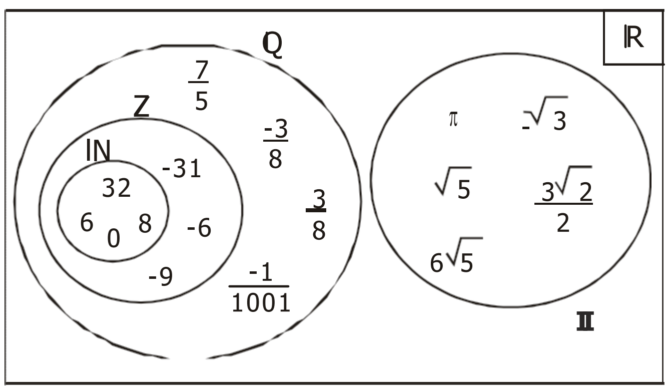


CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES ($\mathbb{R}$)

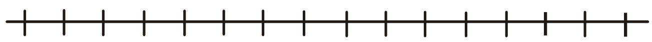
El conjunto formado por los racionales y los irracionales se llama conjunto de números reales, y se designa por $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\mathbb{R} = \{\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}\}}$$

Podemos graficar mediante un diagrama de Venn de la siguiente manera:



Los números reales llenan por completo la recta numérica, por eso se la llama **Recta Real.**



Donde a cada punto de la recta le corresponde un número real y, a cada número real, le corresponde un punto de la recta.

Problemas para la clase

I. Ahora vamos a practicar ...

Escribir SÍ o NO según pertenezca o no el número dado a los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{I}$.

Número	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$
6				
$\frac{2}{5}$				
0,4				
-1				
$\frac{3}{4}$				
+7				
-9				
+11				
$\sqrt{3}$				
$-\frac{1}{7}$				
$-\frac{2}{9}$				
$\sqrt{5}$				
3				
2,53				
1,42				
$\sqrt{6}$				

II. Completa teniendo en cuenta el nombre del primer conjunto al que pertenece cada uno de los siguientes números:

1. 2 es un número: ....
2. -36 es un número: ....
3. $\sqrt{3}$ es un número: ....
4. $-\frac{1}{2}$ es un número: ....
5. +27 es un número: ....
6. 7 y -3 son números: ....
7. π y $\sqrt{4}$ son números: ....

8. -24 y $\sqrt{3}$ son números: ....

9. $-6{,}34$ es un número: ....

10. $\frac{3}{4}$ y 5,2 son números: ....

11. 1,2 y 6,7 son números: ....

12. $\sqrt{7}$ y $\sqrt[4]{2}$ son números: ....

13. -3; 5 y -2 son números: ....

14. $\frac{5}{7}$ es un número: ....

15. $\frac{3}{7}$; 1; -2 y 0,24 son números: ....

16. $\sqrt[3]{2}$ es un número: ....

17. 5; $-\frac{3}{2}$; $\sqrt{2}$ son números: ....

18. π; $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{5}$ son números: ....

19. 2; $\frac{5}{4}$; 2,4 son números: ....

III. Resolver

1. $\sqrt{5}$ es un número:

a) racional
b) real y natural
c) irracional
d) natural
e) entero

2. 0,3333... es un número:

a) racional y decimal
b) irracional
c) natural
d) entero
e) real

3. $4 + \sqrt{3}$ da como resultado:

a) un número natural
b) un número entero
c) un número racional
d) un número irracional
e) todas son correctas

4. Señalar las afirmaciones correctas:

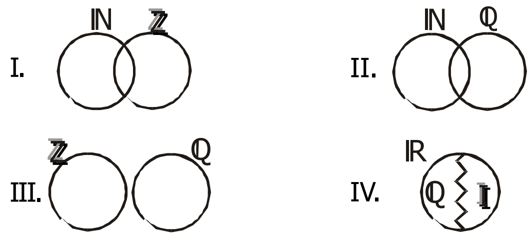
I. $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$
II. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
III. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
IV. $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \phi$

a) Sólo I
b) Sólo II
c) Sólo III
d) II y III
e) Todas

5. $\frac{63}{7}$ es un número:

a) racional y decimal
b) decimal
c) entero y natural
d) irracional
e) real e irracional

6. ¿Cuál de los siguientes gráficos es correcto?



a) Sólo I
b) Sólo II
c) Sólo III
d) Sólo IV
e) I y IV

7. ¿Cuál de los siguientes enunciados es falso?

a) 24 es un número entero

b) $-0{,}432176$ es un número racional

c) 3,7 es un número racional

d) $\sqrt{5}$ es un número real

e) π es un número natural

8. ¿Cuál de los siguientes enunciados es falso?

a) $\frac{3}{2}$ es una fracción

b) 0,3492 es un número irracional

c) $\sqrt{5}$ es un número real

d) $1+\sqrt{2}$ es un número irracional

e) 241 es un número natural

9. ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero?

a) $\frac{3}{7}$ es un número natural

b) $\sqrt{3}$ es un número racional

c) $1{,}\hat{3}$ es un irracional

d) 4,3 es un natural

e) π es un irracional

10. Señalar las afirmaciones incorrectas:

I. $\sqrt{2}$ es irracional porque lleva raíz.

II. $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$

III. $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$

a) Sólo I b) Sólo II c) Sólo III
d) I y II e) II y III

11. Señalar la afirmación correcta:

I. $\sqrt{11}$ es irracional porque tiene raíz.

II. π es un número no racional.

III. $\sqrt{36}$ es un número irracional.

a) Sólo I b) Sólo II c) Sólo III
d) I y II e) I y III

12. ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero?

a) $\frac{3}{5}$ es un número no fraccionario.

b) $\sqrt{3}$ es un número racional.

c) 0,349 es un número racional.

d) $-\sqrt{4}$ es irracional.

e) 4; 5 y -6 son números naturales.

13. $\sqrt{25}$ es un número:

a) racional e irracional
b) decimal
c) irracional
d) natural y entero
e) real y decimal

14. Señalar la afirmación correcta:

I. $3 \in \mathbb{R}$ II. $5; 4; \sqrt{2} \in \mathbb{N}$

III. $\frac{3}{2}; \frac{2}{5}$ y $0,3 \in \mathbb{Q}$ IV. $0; 5; -3$ y $-2 \in \mathbb{Z}$

a) I y II b) I y IV c) Sólo III
d) Sólo II e) I, III y IV

15. ¿Cuántas de las afirmaciones son correctas?

I. $4,3 \in \mathbb{Q}$ II. $\sqrt{2}$ y $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$

III. 3,4 y $-5 \in \mathbb{N}$ IV. $0 \in \mathbb{N}$

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

16. Indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. 2 y -3 son números enteros
II. $\sqrt{3}$ y 1 son irracionales
III. -1,4 y 2 son racionales
IV. $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ están contenidos en los enteros

a) FFVV b) VVFF c) VFVF
d) FFFF e) VFFV

17. Indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. 5; 2 y $\sqrt{2}$ son enteros y reales

II. $\sqrt{36}$ es un número irracional

III. 2 es natural y entero

IV. $\frac{3}{2}; \frac{2}{3}$ y $-\frac{1}{5}$ son racionales

a) FFVV b) FVFV c) FVVV
d) VFVV e) VVVV

18. Indicar verdadero (V) o falso (F), según corresponda:

I. La suma de dos números irracionales siempre es otro irracional. .... ( )

II. El producto de dos números irracionales puede ser un número entero. .... ( )

III. La expresión $\sqrt{\sqrt{16}}$ es irracional. .... ( )

a) VVV b) VFV c) FVF
d) VFF e) FVV

19. El área de un círculo es un número:

a) natural b) entero
c) racional d) irracional
e) todas las anteriores

20. Si el lado de un cuadrado es $\sqrt{3}$, entonces su área es:

a) irracional b) racional y decimal
c) racional y entera d) entera
e) natura