

# Factorización I

(Factor común, Identidades, Agrupación)

## Factorización

$$a(b - c)^2 + b(c - a) + (a - b)^2 + 9abc$$

Al expresar:  $24 = 3 \cdot 8$ ; se ha factorizado 24 en producto de enteros; siendo 3 y 8 factores enteros de 24. A su vez:  $24 = 3 \cdot 2^3$ ; 3 y 2 son también factores de 24 y se llaman factores primos.

Al expresar un polinomio como el producto de otros polinomios pertenecientes a un conjunto dado, se ha efectuado una factorización de polinomios.

No todos los polinomios se pueden factorizar. De acuerdo a las características que presentan los polinomios se puede aplicar tal o cual método, por ejemplo:

$ax^2y^2 + bxy^3z + cx^3my^4$	→ Factor común
$Ax^{2n} + Bx^ny^m + Cy^{2m}$	→ Aspa simple
$Ax^{2n} + Bx^ny^m + Cy^{2m} + Dx^n + Ey^m + F$	→ Aspa doble
$Ax^{4n} + Bx^{3n} + Cx^{2n} + Dx^n + E$	→ Aspa doble especial
$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$	→ Divisores binómicos

Entre otros casos particulares.

Comience factorizando cada uno de los polinomios:

- \*  $x^2y^2 + xy^3 + x^2y$
- \*  $24x^2y^2 + 16xy^3z + 32x^3my^4 - 64zx^3y^5$
- \*  $9ab + 12bd - 45ac - 60cd$
- \*  $121m^2 - 169n^2$
- \*  $256p^8 - q^8$
- \*  $4x^2 - 20xy + 9y^2$
- \*  $6a^2 - 7ab - 5b^2$
- \*  $3x^2 - 10xy + 3y^2$
- \*  $x^4 - 22x^2 - 75$

para saber cómo estamos comenzando en este maravilloso

## Factorización

### Definición

Es un proceso mediante el cual, un polinomio se expresa como la multiplicación indicada de factores primos. Para llevar a cabo este proceso se usarán diversos criterios, como:

- El factor común
- Agrupación de términos
- Identidades
- Aspas
- Evaluación

### Factor primo

Es aquel que no se puede factorizar más; es decir son aquellos polinomios de grado positivo que no se pueden expresar como una multiplicación de factores de grado positivo. Así por ejemplo:

- \*  $F_{(x)} = x^2 - 4$ ; no es primo, porque se puede expresar como:  $(x - 2)(x + 2)$
- \*  $F_{(x)} = x - 2$ ; sí es primo; porque no se puede factorizar.
- \*  $G_{(x)} = 3x - 6$ ; sí es primo; porque al obtener  $3(x - 2)$ , percátese que 3 es de grado cero.

Se dice que la factorización se realiza en  $\mathbb{Z}$  cuando los factores primos obtenidos presentan únicamente coeficientes enteros; mientras no se indique alguna aclaración la factorización sólo se realizará en  $\mathbb{Z}$ .

### Ejemplos:

1. Factorizar:  $F_{(x)} = x^2 - 25$

Reconociendo una diferencia de cuadrados obtenemos:  
 $F_{(x)} = (x - 5)(x + 5)$

2. Factorizar:  $G_{(x)} = x^2 - 3$

Diremos: "no se puede factorizar, es primo"; en cambio si el enunciado fuera:

Factorizar en  $\mathbb{IR}$ , entonces:

$$( \sqrt{\phantom{x}} ) ( \sqrt{\phantom{x}} )$$

tema que es la Factorización.

$$G(x) = x - 3 \quad x + 3$$

Nótese que la variable no está bajo el signo radical; ambos factores son de primer grado y esto es correcto.

## Observaciones:

1. Todo polinomio de primer grado es primo.  
Por ejemplo:  $4x - 3$ ;  $x + y + 1$
2. Para reconocer si un polinomio es primo en  $\mathbb{Z}$ , no es suficiente con agotar los recursos necesarios; a veces se encuentran en un artificio de "sumas y restas".

Por ejemplo:  $F_{(x)} = x^4 + 4$

donde aparentemente no se puede factorizar; cambia si "sumamos y restamos  $4x^2$ "

Así:

$$\begin{aligned} F_{(x)} &= \underbrace{x^4 + 4x^2 + 4}_{\text{T.C.P.}} - 4x^2 \\ &= \underbrace{(x^2 + 2)^2}_{\text{diferencia de cuadrados}} - (2x)^2 \\ &= (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x) \end{aligned}$$

## Criterios diversos

- I. Factor común.-** Se denomina así al factor repetido en varios términos; para lo cual se eligen las bases comunes afectadas al menor exponente.

Así:

$$4x^3y^4 - 5x^2y^5 + 7x^4y^7$$

Se observa:  $(x^2y^4)$  como factor común. Luego factorizando tenemos:

$$x^2y^4(4x - 5y + 7x^2y^3)$$

- II. Identidades.-** Es la aplicación inmediata de algunos Productos Notables como:

### A. Diferencia de cuadrados:

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

Así, al factorizar:  $9x^2 - 16$

Reconocemos:  $(3x)^2 - (4)^2$

Luego:

$$9x^2 - 16 = (3x - 4)(3x + 4)$$

### B. Diferencia de cubos:

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

Así, al factorizar:  $27n^3 - 8$

Reconocemos:  $(3n)^3 - (2)^3$

Luego:

$$27n^3 - 8 = (3n - 2)(9n^2 + 6n + 4)$$

## C. Suma de cubos:

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

Así, al factorizar:  $8n^6 + 1$

Reconocemos:  $(2n^2)^3 + (1)^3$

Luego:

$$8n^6 + 1 = (2n^2 + 1)(4n^4 - 2n^2 + 1)$$

## D. Trinomio cuadrado perfecto:

$$\begin{aligned} A^2 + 2AB + B^2 &= (A + B)^2 \\ A^2 - 2AB + B^2 &= (B - A)^2 = (A - B)^2 \end{aligned}$$

Así, al factorizar:  $9x^4 + 6x^2 + 1$

Nótese:  $(3x^2)^2 + 2(3x^2)(1) + (1)^2$

Luego:

$$9x^4 + 6x^2 + 1 = (3x^2 + 1)^2$$

Factorizar:  $25y^4 - 20y^2 + 4$

Nótese:  $(5y^2)^2 - 2(5y^2)(2) + (2)^2$

Luego:

$$25y^4 - 20y^2 + 4 = (5y^2 - 2)^2$$

- III. Agrupación.-** Consiste en seleccionar convenientemente los términos de tal manera que se genere algún factor común o alguna identidad.

Así, al factorizar:  $a^{10} - a^2b^8 + a^8b^2 - b^{10}$

Nos percatamos que no hay factor repetido en todos los términos; pero si agrupamos de dos en dos obtenemos:

$$a^2(a^8 - b^8) + b^2(a^8 - b^8)$$

Factor repetido:  $a^8 - b^8$

Luego:  $(a^8 - b^8)(a^2 + b^2)$

Continuamos:  $(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)(a^2 + b^2)$

Se usó repetidas veces "diferencias de cuadrados".

$$(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)^2(a + b)(a - b)$$

## ⇒ Problemas resueltos

1. Factorizar:

$$a^3 + a^2 + a$$

Solución:

- \* Sacando el término que se repite:

$$a(a^2 + a + 1)$$

⇒ Factores primos:

- \*  $a$
- \*  $a^2 + a + 1$

2. Factorizar:

$$(x - y)a + (x - y)b$$

Solución:

\* Sacando el término que se repite:

$$(x - y)(a + b)$$

⇒ Factores primos:

- \*  $(x - y)$
- \*  $(a + b)$

3. Factorizar:

$$ax + \underline{bx} + \underline{x^2} + ab$$

Solución:

\* Agrupando:  $a(x + b) + x(b + x)$

\* Extrayendo lo que se repite:  $(x + b)(a + x)$

⇒ Factores primos:

- \*  $(x + b)$
- \*  $(a + x)$

4. Factorizar:

$$x^2 - 36$$

Solución:

\* Utilizando la diferencia de cuadrados.

$$x^2 - 6^2 = (x + 6)(x - 6)$$

⇒ Factores primos:

- \*  $(x + 6)$
- \*  $(x - 6)$

5. Factorizar:  $A = (a + b)^2 - (c - d)^2$

Solución:

Utilizando la diferencia de cuadrados:

$$A = [(a + b) + (c - d)][(a + b) - (c - d)]$$

Eliminando los paréntesis:

$$A = (a + b + c - d)(a + b - c + d)$$

6. Factorizar:  $x^6 - x^2 + 2x - 1$

Solución:

Agrupando los tres últimos términos:

$$N = x^6 - \underbrace{(x^2 - 2x + 1)}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}}$$

$$N = x^6 - (x - 1)^2$$

Transformando a una diferencia de cuadrados:

$$N = (x^3)^2 - [x - 1]^2$$

$$N = [x^3 + (x - 1)][x^3 - (x - 1)]$$

Luego:

$$N = (x^3 + x - 1)(x^3 - x + 1)$$

### **Problemas para la clase**

**I. Factorizar los siguientes polinomios utilizando el factor común.**

1.  $mx + nx$

a)  $x(m + n)$     b)  $m(x + n)$     c)  $n(m + x)$

2.  $ay + by$

a)  $b(y + a)$     b)  $a(y + b)$     c)  $y(a + b)$

3.  $cm - dm$

a)  $m(c + d)$     b)  $m(c - d)$     c)  $cm(m - d)$

4.  $x^2a + x^2b$

a)  $x^2(a + b)$     b)  $x(a + b)$     c)  $x(a^2 + b^2)$

5.  $m^3y + m^3t$

a)  $m(y^3 + t)$     b)  $m^3(y + m)$     c)  $m^3(y + t)$

6.  $a^3x - a^2y$

a)  $a^2(ax - y)$     b)  $a(a^2x - y)$     c)  $a(x - y^2)$

7.  $a^3 + a^2 + a$

a)  $a(a^2 + a + 1)$     b)  $a(a^2 + 1)$   
c)  $a(a^2 + a)$

8.  $a^2b + b$

a)  $ab(a + 1)$   
1)

b)  $a(b^2 +$

c)  $b(a^2 + 1)$

9.  $x^2y - y - zy$

- a)  $(x^2y - y - z)$   
c)  $y(x^2 + 1 + z)$

b)  $y(x^2 - 1 - z)$

10.  $a^2x + ay$

- a)  $a(ax + y)$     b)  $a(ax - y)$     c)  $a(x + y)$

**II. Factorizar los siguientes polinomios utilizando el factor común**

1.  $(x - y)a + (x - y)b$

- a)  $(x - y)(a + b)$   
c)  $(x - y)(a + 1)$

b)  $(x - y)(a - b)$

2.  $(a + b)m^2 + (a + b)n$

- a)  $(a + b)(m + n)$   
c)  $(a + b)(m^2 - n)$

b)  $(a + b)(m^2 + n)$

3.  $(x + y)a^3 + (x + y)b^2$

- a)  $(x + y)(a + b^2)$   
c)  $(x + y)(a^3 + b^2)$

b)  $(x + y)(a^3 + b)$

4.  $(a + 2b)x^4 + (2b + a)y^3$

- a)  $(a + 2b)(x^4 + y^3)$   
c)  $(a + 2b)(x^4 - y^3)$

b)  $(a - 2b)(x^4 + y^3)$

5.  $(m^2 + n^2)x^2 + (m^2 + n^2)y^2$

- a)  $(m^2 + n^2)(x + y)$   
c)  $(m^2 + n^2)(x^2 + y^2)$

b)  $(m^2 + n^2)(x + y^2)$

6.  $(a + b + c)x + (a + b + c)y$

- a)  $(a + b)(x + y)$   
c)  $(a + b + c)(x - y)$

b)  $(a + b + c)(x + y)$

7.  $(m^3 + n^4)a^4 - (m^3 + n^4)b^3$

- a)  $(m^3 + n^4)(a^4 - b^3)$   
c)  $(m^3 + n^4)(a - b^3)$

b)  $(m^3 + n^4)(a^4 - b)$

8.  $(x + y)^3 - (x + y)^4z$

- a)  $(x + y)^3[1 + z]$   
c)  $(x + y)^3[1 - (x + y)z]$

b)  $(x + y)^3[1 - (x + y)]$

9.  $(m^2 + n)(x - y) + (m^2 + n)(2x + 5y)$

- a)  $(m^2 + n)(3x + 4y)$   
c)  $(m^2 + n)(x + 4y)$

b)  $(m^2 + n^2)(3x + y)$

**III. Agrupando términos, factorice los siguientes polinomios:**

1.  $ax + x^2 + ab + bx$

- a)  $(a + x)(x + b)$   
c)  $(a + b)(x + b)$

b)  $(a + x)(ax + b)$

2.  $ax + bx + cx + ay + by + cy$

- a)  $(a + b + c)(x - y)$   
c)  $(a + b + c)(x + y)$

b)  $(a + b)(x + y)$

3.  $m^2 + mn + mp + np$

- a)  $(m + n)(m + p)$   
c)  $(m + n)(mp + 1)$

b)  $(m + n)(n + p)$

4.  $m^2 - mn - mp + np$

- a)  $(m - n)(m + p)$   
c)  $(m - n)(m - p)$

b)  $(m + n)(m - p)$

5.  $x^2y^2 + x^3y^3 + x^5 + y^5$

- a)  $(x^3 + y^2)(x^2 + y^3)$   
c)  $(x^3 + y^2)(x^2 - y^3)$

b)  $(x^2 + y^2)(x + y)$

6.  $x^7 - x^4y^4 - x^3y^3 + y^7$

- a)  $(x^3 + y^4)(x^4 + y^3)$   
c)  $(x^3 - y^4)(x^4 - y^3)$

b)  $(x^3 - y^4)(x^4 + y^3)$

**IV. Utilizando las identidades factorizar los siguientes polinomios:**

1.  $1 - x^2$

- a)  $(1 + x)(1 - x)$   
c)  $(1 - x)(1 + 2x)$

b)  $(1 - x)^2$

2.  $y^2 - 16$

- a)  $(y - 2)(y + 8)$   
c)  $(y + 4)(y - 4)$

b)  $(y - 4)^2$

3.  $a^4 - y^2$

- a)  $(a^2 + y)(a^2 - y)$   
c)  $(a^2 + y^2)(a^2 - y)$

b)  $(a + y)(a - y)$

4.  $4x^2 - b^2$

- a)  $(4x + b)^2$   
c)  $(2x + b)(2x - b)$

b)  $(4x + b)(4x - b)$

5.  $b^2 - a^2$

a)  $(b + a)(b - a)$

b)  $(b - a)^2$

c)  $(b + a^2)(b - a^2)$

6.  $25x^2 - 9y^2$

- a)  $(5x + 9y)(5x - 9y)$       b)  $25x + 3y^3$   
 c)  $(5x + 3y)(5x - 3y)$

7.  $(x + 3)^2 - 16$

- a)  $(x + 7)(x - 1)$       b)  $(x + 7)(x + 1)$   
 c)  $(x + 7)(x - 2)$

8.  $a^3 - 1$

- a)  $(a - 1)(a^2 - a + 1)$       b)  $(a - 1)^3$   
 c)  $(a - 1)(a^2 + a + 1)$

9.  $a^3 + 27$

- a)  $(a + 3)(a^2 - 3a + 9)$       b)  $(a + 3)(a^2 + 3a + 9)$   
 c)  $(a + 3)^3$

10.  $64a^3 - 27$

- a)  $(4a - 3)(16a^2 - 12a + 9)$       b)  $(4a - 3)(16a^2 + 12a + 9)$   
 c)  $(4a - 3)^3$

11.  $n^2 + 4n + 4$

- a)  $(n + 4)^2$       b)  $(n + 2)^2$       c)  $(n - 4)^2$

12.  $n^2 - 6n + 9$

- a)  $(n + 3)^2$       b)  $(n - 9)^2$       c)  $(n - 3)^2$

13.  $4x^2 + 20x + 25$

- a)  $(2x + 5)^2$       b)  $(2x + 25)^2$       c)  $(2x - 5)^2$

14.  $9m^2 - 24m + 16$

- a)  $(3m - 16)^2$       b)  $(3m + 4)^2$       c)  $(3m - 4)^2$

**V. Señalar el número de factores primos de cada factorización:**

a)  $P_{(x)} = (x - 3)(x - 2)(x - 1)(x - 5)$

- a) 1      b) 2      c) 3  
 d) 4      e) 5

b)  $Q_{(x)} = (x + 1)^2(x + 2)^3(x + 3)$

- a) 1      b) 2      c) 3  
 d) 6      e) 5

c)  $M_{(x)} = x(x + 1)(x - 2)^5(x - 7)^9(x - 1)$

- a) 1      b) 2      c) 3  
 d) 4      e) 5

d)  $F_{(x)} = 2x^3(x + 1)(x^2 - 1)^4(x + 1)^5$

- a) 1      b) 2      c) 3  
 d) 4      e) 5

**VI. Responder de acuerdo a la pregunta:**

1. Al factorizar:  $ac^4x^4y - ab^4c^4y$   
 ¿cuántos factores primos se obtienen?

- a) 5      b) 6      c) 4  
 d) 7      e) 3

2. Después de factorizar:  $x^4 - 1$   
 señalar el número de factores primos.

- a) 1      b) 2      c) 3  
 d) 4      e) 5

3. Hallar el número de factores primos de:  
 $ax^2 + bx^2 - ay^2 - by^2$

- a) 1      b) 5      c) 3  
 d) 4      e) 2

4. Cuántos factores primos se obtienen al factorizar:  
 $a^4m + a^4n - b^4m - b^4n$

- a) 2      b) 3      c) 1  
 d) 4      e) 0

5. Después de factorizar:  $a^2x^2 + b^2y^2 - b^2x^2 - a^2y^2$   
 indicar un factor primo.

- a)  $x + y$       b)  $x + b$       c)  $y + b$   
 d)  $x + a$       e)  $x - a$

6. Factorizar:  $(4x + 3y)^2 - (x - y)^2$   
 e indicar un factor.

- a)  $5x + 4y$       b)  $3x + 2y$       c)  $2x + 5y$   
 d)  $3x + 4y$       e)  $5x + 3$

7. Factorizar:  $x^3y^2 + y^3z^2 - x^3z^2 - y^5$   
 señalar un factor primo.

- a)  $x + y$       b)  $y + z$       c)  $y + 1$   
 d)  $x^2 - xz + y^2$       e)  $x^2 - xy + y^2$

8. Factorizar:  
 $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$

- a)  $(b - c)(a - b)(a - c)$   
 b)  $(a + b)(a + c)(b + c)$   
 c)  $(a + b)(a - b)(a + c)$   
 d)  $(a + b + c)(ab + ac + bc)$   
 e)  $(a + b)(a + b)(a + b + c)$

## Autoevaluación

1. Dado el siguiente polinomio.

$$P_{(x)} = (x + 3)(x - 2)(x^2 + 1)$$

¿cuántos factores primos tiene?

- a) 1                      b) 2                      c) 3  
d) 4                      e) 5

2. Si:  $P_{(x)} = (x - 1)^2 (x^2 - 2) (x^2 + x + 1)^3$

dar el número de factores primos.

- a) 1                      b) 2                      c) 3  
d) 5                      e) 6

3. Del problema anterior, ¿cuántos factores cuadráticos tiene?

- a) 0                      b) 1                      c) 2  
d) 3                      e) 4

4. Factorizar:

$$P_{(x,y)} = x^3(x + y) + 5xy(x + y)$$

dar un factor primo.

- a)  $x - y$                       b)  $x^2 - 5y$                       c)  $2x + y$   
d)  $x + y$                       e)  $x + 5y$

5. Factorizar:

$$R_{(x)} = x^3 + x^2 - x - 1$$

hallar un factor primo.

- a)  $x + 1$                       b)  $x^2 + 1$                       c)  $2x - 1$   
d)  $x^2 - 1$                       e)  $x - 3$

## Claves

1. c  
2. c  
3. c  
4. d



# Factorización II

## (Aspa simple, Aspa doble)



### Aspa simple

Se utiliza para factorizar particularmente polinomios de la forma:

$$ax^{2n} + bx^n + c$$

### Proceso:

1. Descomponer los extremos.
2. Verificar que la suma de productos en aspa sea igual al término central.

Así, al factorizar:  $x^2 - 7x + 12$   
Descomponemos:

$$\begin{array}{ccc} x^2 & - & 7x & + & 12 \\ x & \searrow & & \nearrow & -3 \\ & & \uparrow & & \\ x & \nearrow & & \searrow & -4 \end{array}$$

Verificando:  $-3x - 4x = -7x$   
Luego, los factores se forman horizontalmente:  
 $(x - 3)(x - 4)$

### Criterio del Aspa doble

Se utiliza para factorizar polinomios de seis términos de la forma:

$$ax^{2n} + bx^ny^m + cy^{2m} + dx^n + ey^m + f$$

El método consiste en descomponer todos los términos que produzcan aspa, de tal manera que la suma de la multiplicación en aspa nos compruebe cada uno de los términos del polinomio. Si faltará algún término se le completará con cero, además los factores se toman horizontalmente.

Ejemplo:

Factorizar:

$$E(x; y) = 3x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 2y + 1$$

Resolución:

$$E(x; y) = 3x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 2y + 1$$

Comprobaciones:

$$\begin{array}{lll} \text{I. } 3xy + & \text{II. } y + & \text{III. } 3x + \\ \frac{xy}{4xy} & \frac{y}{2y} & \frac{x}{4x} \end{array}$$

Finalmente:

$$E(x; y) = (3x + y + 1)(x + y + 1)$$

### Problemas resueltos

1. Factorizar utilizando el criterio del Aspa simple.

$$P_{(x)} = x^2 + 7x + 12$$

Solución:

$$\begin{array}{ccc} x^2 + 7x + 12 & & \\ x & \searrow & 4 \Rightarrow 4x \\ x & \nearrow & 3 \Rightarrow 3x \end{array}$$

\* Sumando:  $7x \rightarrow$  Término central.

$$P_{(x)} = (x + 4)(x + 3)$$

\* los factores primos son:  $(x + 4)$   
 $(x + 3)$

2. Factorizar:

$$P_{(x)} = x^2 + 4x - 21$$

Utilizando el criterio del Aspa simple.

Solución:

$$\begin{array}{ccc} x^2 + 4x - 21 & & \\ x & \searrow & 7 \Rightarrow 7x \\ x & \nearrow & -3 \Rightarrow -3x \\ & & +4x \text{ término central} \end{array}$$

\*  $P_{(x)} = (x + 7)(x - 3)$

\* los factores primos son:  $(x + 7)$   
 $(x - 3)$



\*  $a^2 + ab - 2b^2 + 11bc - 2ac - 15c^2$

\*  $7bc + 2a^2 - 3ab - 3c^2 - 2b^2 - ac$



d)  $(12x - 5y + 20)(x + 3y + 1)$

e)  $(x - y + 20)(12x + 3y + 1)$

19. Factorizar:

$$E(x; y) = 21xy - 39y^2 + 56x - 92y + 32$$

Indicar la suma de sus factores primos.

- a)  $3y + 9$
- b)  $10x - 13y + 12$
- c)  $3y + 8$
- d)  $2x - 13y + 4$
- e)  $7x - 10y + 12$

20. Factorizar:

$$D(x; y) = 15x^2 + 151xy + 10y^2 + 45x + 301y + 30$$

- a)  $(x + 1)(15y + 30)$
- b)  $(x + y + 1)(15x + y + 30)$
- c)  $(15x + y + 30)(x + 10y + 1)$
- d)  $(15x + y + 30)(x - 10y + 1)$
- e)  $(x + y + 1)(15x + 10y + 30)$

### Autoevaluación

1. Factorizar y dar un factor primo:

$$P_{(x)} = 8x^2 - 2x - 3$$

- a)  $2x - 1$
- b)  $4x - 3$
- c)  $2x + 3$
- d)  $x + 1$
- e)  $3x - 1$

2. Factorizar y dar un factor primo:

$$B_{(x)} = 20x^4 + 31x^2 - 9$$

- a)  $5x^2 - 9$
- b)  $2x + 1$
- c)  $x - 1$
- d)  $x^2 + 9$
- e)  $2x^2 + 11$

3. Factorizar:

$$P_{(x,y)} = 6x^2 + 19xy + 15y^2 - 17y - 11x + 4$$

señalar un factor.

- a)  $2x + y + 1$
- b)  $3x + 5y + 4$
- c)  $2x + 3y - 1$
- d)  $2x + y - 1$
- e)  $x + 5y - 4$

4. Factorizar:

$$P(x; y) = 5x^2 + 7xy + 2y^2 + 8x + 2y - 4$$

- a)  $(5x + 2y - 2)(x + y + 2)$
- b)  $(5x + 2y + 2)(x + y + 2)$
- c)  $(5x + 2y - 2)(x + y + 1)$
- d)  $(5x + 2y + 2)(x + y + 4)$
- e)  $(5x - 2y - 2)(x + y - 2)$

5. Factorizar:

$$P_{(x,y)} = 30x^2 + 2xy - 4y^2 + 47x - 12y + 7$$

- a)  $(6x - 2y + 1)(5x + 2y + 7)$
- b)  $(6x + 2y + 1)(5x + 2y + 7)$
- c)  $(6x - 2y - 1)(5x + 2y - 7)$
- d)  $(6x - y + 1)(5x + y + 7)$
- e)  $(6x + y + 1)(5x + y + 7)$

### Claves

- 1. b
- 2. b
- 3. c

4. a  
5. a

# Factorización III (Divisores binomios)

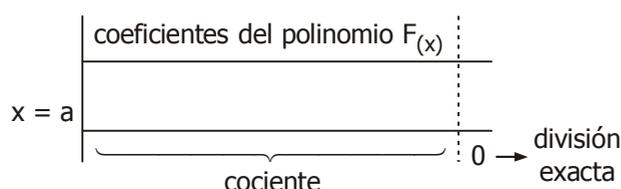


## Método de los divisores binomios

Se usa básicamente para factorizar polinomios de grado mayores o iguales a tres.

### Proceso:

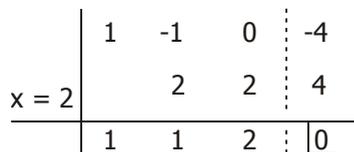
Consiste en evaluar usando el esquema de Ruffini, así dado un polinomio  $F(x)$ :



Luego:  $F(x) = (x - a)q(x)$

Al valor "a" se denomina cero del polinomio

Ejemplo:  $(x^3 - x^2 - 4)$ ; si evaluamos en:  $x = 2$ , tenemos:



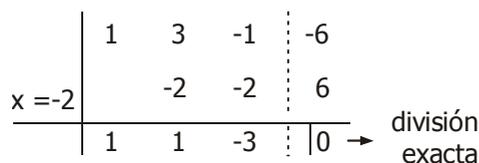
Luego:  $(x^3 - x^2 - 4)$  se puede expresar como:

$(x - 2)(x^2 + x + 2)$ . Nótese que está factorizado.

Importante es saber en qué valores podemos usar el esquema; entonces veamos:

- Si el primer coeficiente es la unidad (polinomio mónico), se trabaja con los divisores del término independiente. Así, al factorizar:  $(x^3 + 3x^2 - x - 6)$ ; notamos que es mónico, luego planteamos:  $\pm(1; 2; 3; 6)$

Probando:



Luego:  $(x + 2)(x^2 + x - 3)$

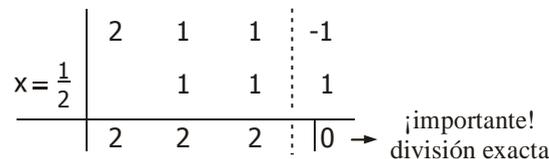
- Si no es mónico el polinomio, usaremos opcionalmente:

$$\pm \frac{\text{Divisores del término independiente}}{\text{Divisores del coeficiente principal}}$$

Así al factorizar:  $(2x^3 + x^2 + x - 1)$   
Planteamos, luego:

$$\pm \left( 1; \frac{1}{2} \right)$$

Al usar el esquema, una vez agotados los valores enteros:  $(+1; -1)$  no genera división exacta entonces probamos



Finalmente:

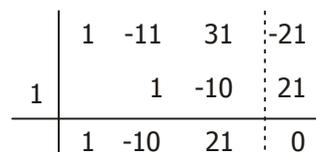
$$\begin{aligned} &= \left( x - \frac{1}{2} \right) (2x^2 + 2x + 2) \\ &= \left( \frac{2x - 1}{2} \right) 2(x^2 + x + 1) \\ &= (2x - 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

### ➤ Problemas resueltos

- Factorizar:  $P(x) = x^3 - 11x^2 + 31x - 21$

Resolución:

Como el polinomio es mónico planteamos:  $\pm 1; \pm 3; \pm 7; \pm 21$ ; para:  $x = 1$ , se anula, luego tendrá un factor  $(x - 1)$  determinando el otro factor por Ruffini



Luego:

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - 10x + 21)$$

~~$x \quad -7$~~

x - 3

Finalmente:  $P(x) = (x - 1)(x - 7)(x - 3)$

2. Factorizar:  $R(x) = x^3 - x - 6$

Resolución:

Los divisores del término independiente son:

$$\pm 1 ; \pm 2 ; \pm 3 ; \pm 6$$

para  $x = 2$ , se anula el polinomio; veamos:  $2^3 - 2 - 6 = 0$

Entonces tendrá un factor  $(x - 2)$

Luego por Ruffini:

2	1	0	-1	-6
		2	4	6
	1	2	3	0

finalmente:  $R(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 3)$

3. Factorizar:  $A(x) = x^5 + 5x^4 + 7x^3 - x^2 - 8x - 4$

Resolución:

Los divisores del término independiente son:  $\pm 1 ; \pm 2 ; \pm 4$

Se anula para:  $x = 1$ ;  $x = -2$  y  $x = -1$

Aplicando Ruffini tres veces:

	1	5	7	-1	-8	-4
1	↓	1	6	13	12	4
	1	6	13	12	4	0
-2		-2	-8	-10	-4	
	↓	4	5	2	0	
-1		-1	-3	-2		
	↓	3	2	0		

Luego:

$$A(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 1)(x^2 + 3x + 2)$$

$$\begin{array}{cc} x & \uparrow & 2 \\ & \diagdown & / \\ & x & 1 \end{array}$$

$$A(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 1)(x + 2)(x + 1)$$

4. Factorizar:  $E(x) = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

Resolución

Como el polinomio no es mónico se plantea:

$$\pm \left\{ \frac{1}{1; 2} \right\} = \pm 1 ; \pm \frac{1}{2}$$

Para:  $x = -\frac{1}{2}$  se anula, entonces tendrá un factor  $(2x + 1)$ :

$-\frac{1}{2}$	2	3	3	1
	↓	-1	-1	-1
	2	2	2	0

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 2x + 2)$$

$$\left(\frac{2x + 1}{2}\right)2(x^2 + x + 1)$$

Luego:

$$E(x) = (2x + 1)(x^2 + x + 1)$$

5. Factorizar:

$$R(x) = 12x^3 + 8x^2 - 3x - 2$$

$R(x)$  no es mónico, se plantea:

$$\pm \left\{ \frac{1; 2}{1; 2; 3; 4; 6; 12} \right\} = \pm \left\{ \frac{1}{1} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{6} ; \frac{1}{12} \right\}$$

Para:  $x = \frac{1}{2}$  se anula, luego:

$\frac{1}{2}$	12	8	-3	-2
		6	7	2
	12	14	4	0

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)(12x^2 + 14x + 4)$$

$$\left(\frac{2x - 1}{2}\right)2(6x^2 + 7x + 2)$$

Finalmente:

$$A(x) = (x - 1)(x + 2)^2(x + 1)^2$$

$$(2x - 1)(3x^2 + 7x + 2)$$

$$\begin{array}{ccc} 3x & & 2 \\ & \nearrow & \searrow \\ & 7x & \\ & \nwarrow & \nearrow \\ 2x & & 1 \end{array}$$

Finalmente:

$$R(x) = (2x - 1)(3x + 2)(2x + 1)$$

## Problemas para la clase

### Bloque I

1. Factorizar:

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \text{ dar un factor primo}$$

- a)  $x + 1$       b)  $x + 2$       c)  $x - 3$   
d)  $x - 6$       e)  $x + 6$

2. Señalar un factor primo en:

$$P(x) = x^3 - 8x^2 + 17x - 10$$

- a)  $x - 1$       b)  $x - 2$       c)  $x - 3$   
d)  $x - 4$       e)  $x - 5$

3. Dar un factor primo en:

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$$

- a)  $x + 2$       b)  $x - 2$       c)  $x - 3$   
d)  $x + 4$       e)  $x + 9$

4. Factorizar:  $P(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$

Dar la suma de sus factores primos

- a)  $2x - 1$       b)  $3x - 5$       c)  $3x - 9$   
d)  $3x + 1$       e)  $2x^2 + x + 1$

5. Factorizar:  $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$   
Dar la suma de los términos independientes de sus factores primos.

- a) 2      b) 3      c) 5  
d) 6      e) 7

6. Factorizar:  $P(x) = x^3 - 10x + 3x^2 - 24$   
Dar un factor primo.

- a)  $x - 2$       b)  $x - 1$       c)  $x + 3$   
d)  $x + 2$       e) N.A.

7. Factorizar:  $P(x) = x^3 - x - 6x^2 + 30$   
Dar un factor primo.

- a)  $x - 3$       b)  $x - 2$       c)  $x + 5$   
d)  $x + 3$       e)  $x + 1$

8. Factorizar:

$$P(x) = x^3 - 4x - 3x^2 + 12$$

- a)  $(x - 2)(x - 3)(x + 2)$   
b)  $(x - 2)(x + 3)(x - 2)$   
c)  $(x + 2)(x - 3)(x + 2)$   
d)  $(x - 2)(x - 3)(x - 2)$

9. Factorizar:

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$$

Dar un factor primo

- a)  $x - 1$       b)  $x + 1$       c)  $x + 3$   
d)  $x - 4$       e)  $2x + 3$

10. Dar un factor primo en:  $P(x) = 3x^3 - 3x + x^2 - 1$

- a)  $x + 2$       b)  $x - 2$       c)  $2x + 1$   
d)  $3x + 1$       e)  $2x - 3$

### Bloque II

11. Un factor del polinomio  $P(x) = x^3 - 3x^2 + ax - 6$  es  $(x - 3)$ , hallar "a"

- a) 0      b) 1      c) 2  
d) 3      e) 4

12. Dar un factor primo luego de factorizar:

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

- a)  $x^2 + x + 1$       b)  $x^2 - x + 1$   
c)  $x^2 + 1$       d)  $x - 1$   
e)  $2x^2 + x + 1$

13. Factorizar:

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$$

- a)  $(x + 1)(x^2 + x + 2)$   
b)  $(x + 1)(x^2 - 2x - 2)$   
c)  $(x - 1)(x^2 + x + 2)$   
d)  $(x - 1)(x^2 - 2x - 2)$   
e)  $(x - 1)(x^2 - 2x + 2)$

14. Factorizar:  $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

Indicar la suma de factores primos

- a)  $3x + 3$       b)  $3x - 1$       c)  $3x + 2$   
d)  $x - 4$       e)  $2x + 1$

15. Señalar un factor primo:  $P(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 14$

- a)  $x + 1$       b)  $x^2 + 4x + 7$   
c)  $x^2 + x + 1$       d)  $x - 2$   
e)  $x + 3$

16. Factorizar:  $P(x) = x^3 - x - 6$

Indicar el término independiente de uno de los factores primos.

- a) 1      b) 2      c) 3  
d) 4      e) 5  
e)  $(x^2 + 3)(x + 4)$

17.

Factorizar:

$$P(x) = x^5 + 4x^4 - 10x^2 - x$$

+ 6

Dar el factor primo que más se repite

a)  $x + 2$   
d)  $x + 1$

b)  $x + 3$   
e)  $x - 3$

c)  $x - 1$

18. Factorizar:  $P(x) = 12x^3 + 16x^2 + 7x + 1$   
Indicar el número de factores primos

- a) 1                      b) 2                      c) 3  
d) 4                      e) 5

19. Factorizar:  $P(x) = x^3 + x - 10$   
dar un factor.

- a)  $2x - 1$               b)  $x + 3$               c)  $x - 2$   
d)  $x^2 + 2$               e)  $x - 4$

20. Factorizar:

$$P(x) = x^3 - x^2 + x - 6$$

La suma de factores primos es equivalente a:

- a)  $(x - 1)^2$               b)  $(x + 1)^2$               c)  $x^2 + 1$   
d)  $x^2 - 1$               e)  $x$

### Bloque III

21. Al factorizar:  $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 7x + 2$   
Indicar verdadero (V) o falso (F)

- I. Tiene tres factores primos.  
II. Uno de los factores primos es mónico.  
III. Un factor primo es:  $(x^2 + 2x - 3)$ .

- a) FVF                      b) VVV                      c) FFF  
d) VFF                      e) FFV

22. Del esquema mostrado:

	12	-56	77	-30
$\frac{2}{3}$		8	-32	30
	12	-48	45	0

El polinomio expresado en sus factores primos es:

- a)  $(3x + 2)(5x - 2)(3x - 2)$   
b)  $(2x + 3)(2x + 5)(3x - 2)$   
c)  $(2x + 3)(2x - 5)(3x - 2)$   
d)  $(2x - 3)(2x - 5)(3x - 2)$   
e)  $(2x + 3)(2x + 5)(3x + 2)$

23. Si uno de los factores primos del polinomio:

$P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ , es  $(x + 2)$ , los demás factores primos serán:

- a)  $(x - 4)(x - 2)$                       b)  $(x + 4)(x - 3)$   
c)  $(x - 4)(x - 3)$                       d)  $(x + 4)(x + 3)$   
e)  $(x - 4)(x + 3)$

24. Factorizar el siguiente polinomio:

$$P(x) = x^2(2x - 3) + (4x + 3)^2$$

- a)  $(2x + 1)(x + 3)^2$                       b)  $(2x + 1)^2(x + 3)$   
c)  $(2x - 1)(x - 3)^2$                       d)  $(2x + 1)(x - 3)^2$   
e)  $(3x + 1)(x + 2)^2$

25. Factorizar:

$$x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$$

- a)  $(x - 1)^4(x + 1)$                       b)  $(x + 1)^4(x - 1)$   
c)  $(x + 1)^3(x - 1)^2$                       d)  $(x - 1)^2(x + 1)^3$   
e)  $(x - 1)^3(x + 1)^2$

26. Factorizar:  $P(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 3$

Indicar la suma de coeficientes del factor primo de mayor grado.

- a) 4                      b) 5                      c) 6  
d) 7                      e) 8

27. El polinomio:  $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

genera tres factores primos de la forma:  $(x + a)(x + b)(x + c)$   
Indicar "a + b + c"

- a) 0                      b) 1                      c) 2  
d) 3                      e) 4

28. Factorice el polinomio:  $P(x) = 4x^3 - 4x^2 - 11x + 6$   
e indique la suma de sus factores primos.

- a)  $4x$                       b)  $5x$                       c)  $6x$   
d)  $7x$                       e)  $8x$

29. Hallar la suma de los términos independientes de los factores primos de:

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$$

- a) 0                      b) 1                      c) 2  
d) 3                      e) 4

30. Factorizar:

$$P(x) = x^3 - 2ax^2 + (2 - 3a^2)x + 2a$$

- a)  $(x + a)(x^2 - 3ax + 2)$   
b)  $(x - a)(x^2 - 3ax + 2)$   
c)  $(x + a)(x^2 + 3ax + 2)$   
d)  $(x - 1)(x^2 - 3ax + 2)$   
e)  $(x - a)(x^2 + 2ax + 3)$

## Autoevaluación

1. Factorizar y dar un factor primo:

$$P_{(x)} = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

- a)  $x + 1$       b)  $x - 6$       c)  $x - 3$   
d)  $x + 2$       e)  $x$

2. Señalar el término independiente de un factor primo

$$P_{(m)} = m^3 - 7m^2 + 14m - 8$$

- a) 2              b) -3              c) 4  
d) -2            e) 6

3. Factorizar:  $P_{(x)} = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$   
Indicar la suma de sus factores primos.

- a)  $2x^2 + x + 1$               b)  $3x - 9$   
c)  $3x - 5$                       d)  $2x - 1$   
e)  $3x + 1$

4. Factorizar:  $P_{(a)} = a^3 + 6a^2 + 11a + 6$

- a)  $(a + 1)(a + 2)(a + 3)$   
b)  $(a - 1)(a - 2)(a - 3)$   
c)  $(a + 6)^3$   
d)  $(a - 1)(a + 2)(a + 3)$   
e)  $(a + 1)(a + 2)(a - 3)$

5. Encontrar un factor primo luego de factorizar

$$P_{(a)} = a^3 - a - 6$$

- a)  $a - 1$                               b)  $a - 4$   
c)  $a + 3$                               d)  $a^2 + 2a + 3$   
e)  $a^2 + 2a + 4$