

# M.C.D. y M.C.M.

Este problema, expuesto por primera vez en el siglo pasado, cuenta con la simpatía de los aficionados a los problemas matemáticos.

Se trata de obtener, para toda la serie de números naturales, expresiones en las que aparezca cuatro veces el número 4, junto con símbolos matemáticos simples. Para expresar los diez primeros números, sólo son necesarios los signos de las cuatro operaciones fundamentales: sumar, restar, multiplicar y dividir.

\* Aquí está la prueba:

$$1 = \frac{44}{44}$$

$$2 = \frac{4}{4} + \frac{4}{4}$$

$$3 = \frac{4 + 4 + 4}{4}$$

$$4 = 4 + 4 \times (4 - 4)$$

$$5 = \frac{(4 \cdot 4) + 4}{4}$$

$$6 = 4 + \frac{4 + 4}{4}$$

$$7 = \frac{44}{4} - 4$$

$$8 = 4 + 4 + 4 - 4$$

$$9 = 4 + 4 + \frac{4}{4}$$

$$10 = \frac{44 - 4}{4}$$

## El Máximo Común Divisor (M.C.D.)

El máximo común divisor de dos o más polinomios es el polinomio de menor grado que es factor de los polinomios dados.

\* Para hallar el M.C.D. de varios polinomios se procede de la forma siguiente:

- Se descompone cada polinomio en el producto de sus factores primos.
- El M.C.D. es el producto obtenido al tomar todos los factores primos comunes elevados a la menor potencia con la que entran a formar parte en cada uno de los polinomios.

\* Los números no son factores primos.

Ejemplo:

El M.C.D. de:

$$A = (x - y)^3 (x + 2y)^2$$

$$B = (x - y)^2 (x + 2y)^3$$

$$C = (x - y)^2 (x + 2y)$$

$$\text{es: } (x - y)^2 (x + 2y).$$

Dos o más polinomios son primos entre sí, si su M.C.D. es la unidad  $\pm 1$ .

## El Mínimo Común Múltiplo (M.C.M.)

En dos o más polinomios, es el polinomio de mayor grado del cual es factor cada uno de los polinomios dados.

\* Para hallar el M.C.M. de varios polinomios se procede de la forma siguiente:

- Se descompone cada polinomio en el producto de sus factores primos.
- El M.C.M. es el producto obtenido al tomar todos los factores primos comunes y no comunes, elevados a la mayor potencia con la que entran a formar parte en cada uno de los polinomios.

Ejemplo:

El M.C.M. de:

$$A = (x - y)^3 (x + 2y)^2$$

$$B = (x - y)^2 (x + 2y)^3$$

$$C = (x - y)^2 (x + 2y)$$

$$\text{es: } (x - y)^3 (x + 2y)^3$$

## ➔ Problemas resueltos

1. Extraer el M.C.D. de:

$$P_{(x,y,z)} = x^3 y^2 z^4$$

$$Q_{(x,y,z)} = x^2 y^5 z^6$$

Solución:

\* El M.C.D. son los factores repetidos con menor exponente.

$$\Rightarrow \text{M.C.D.} = x^2 y^2 z^4$$

2. Del problema anterior, extraer el M.C.M.

Solución:

\* El M.C.M. son los factores repetidos y no repetidos con el mayor exponente.

$$\Rightarrow \text{M.C.M.} = x^3 y^5 z^6$$

3. Sacar el M.C.D. de:

$$P_{(x)} = (x+1)^2 (x-3)^2$$

$$Q_{(x)} = (x-3)(x-1)(x+5)$$

Solución:

$$\therefore \text{M.C.D} = (x-3)$$

4. Obtener el M.C.M. de:

$$P_{(x)} = (x-2)^2 (x-3)^2$$

$$Q_{(x)} = (x+2)(x-3)$$

Solución:

\* M.C.M. será:

$$(x-2)^2 (x-3)^2 (x+2)$$

5. Obtener el M.C.D. de:

$$P_{(x)} = x^2 + 2x + 1$$

$$Q_{(x)} = x^2 - 1$$

Solución:

\* Factorizando primero cada polinomio.

$$P_{(x)} = (x+1)^2$$

$$Q_{(x)} = (x+1)(x-1)$$

\* M.C.D. será:  $(x+1)$

## Bloque I

1. Hallar el M.C.D de:

$$A_{(a,b,c)} = 28a^2b^3c^4$$

$$B_{(a,b,c)} = 35a^3b^4c^5$$

$$C_{(a,b,c)} = 4a^2b^5c^6$$

- a)  $a^2 b^3 c^4$       b)  $a^3 b^5 c^6$       c)  $7a^2 b^3 c^4$   
 d)  $a^3 b^5 c^4$       e)  $a^2 b^4 c^5$

2. Hallar el M.C.M. de:

$$A_{(x,y,z)} = 3x^2y^3z$$

$$B_{(x,y,z)} = 4x^3y^3z^2$$

$$C_{(x,y,z)} = 6x^4$$

- a)  $x^2y^3z$       b)  $24x^4y^3z^2$       c)  $12x^4y^3z^2$   
 d)  $x^4y^3z^2$       e)  $x^4y^3z^2$

3. Hallar el M.C.M de las expresiones:

$$A_{(x)} = 3(x+1)$$

$$B_{(x)} = 2(x^2 - x + 1)$$

$$C_{(x)} = 6x^3 + 6$$

- a)  $6(x^3 + 1)$   
 b)  $(x+1)(x^2 - x + 1)$   
 c)  $2(x+1)(x^2 + x + 1)$   
 d)  $(x^3 + 1)$   
 e)  $(x+1)$

4. Hallar el M.C.D. de los polinomios:

$$P_{(x)} = (x+2)^2 (x-3)^4 (x+1)$$

$$Q_{(x)} = (x+2)^5 (x-3)^5 (x+6)$$

- a)  $(x+2)$   
 b)  $(x+2)(x-3)$   
 c)  $(x+2)^2 (x-3)^4$   
 d)  $(x+1)(x-3)$   
 e)  $(x+2)^5 (x-3)^5 (x+1)(x+6)$

5. Hallar el M.C.M. de los polinomios:

$$P_{(x)} = (x+2)^3 (x-3)^2 (x-1)$$

$$Q_{(x)} = (x+2)(x-3)(x+1)$$

- a)  $(x+2)^3 (x-3)^2 (x^2 - 1)$   
 b)  $(x+2)(x-3)(x+1)(x-1)$   
 c)  $(x+2)^3 (x-3)^2$   
 d)  $(x^2 - 1)(x^2 - x - 6)$   
 e)  $(x+2)(x-3)(x+1)$

6. Hallar el M.C.D. de:

$$A_{(a,b)} = a^4 - b^4$$


$$B_{(a,b)} = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$$

- a)  $a^2 - b^2$       b)  $a^2 + b^2$       c)  $a - b$   
 d)  $a + b$       e)  $(a + b)^2$

7. Del problema anterior extraer el M.C.M.

- a)  $a^2 + b^2$       b)  $(a^2 - b^2)^2$   
 c)  $(a^2 + b^2)^2 (a^2 - b^2)$       d)  $(a + b)^2$   
 e)  $(a - b)^2$

8. Hallar el M.C.D. de:

$$B_{(x)} = x^2 - 2x + 1$$

$$C_{(x)} = x^3 - x$$

$$D_{(x)} = x^2 - 4x + 3$$

- a)  $x + 1$       b)  $x - 1$       c)  $(x - 1)^2$   
 d)  $x^2 - 1$       e)  $(x + 1)^2$

9. Hallar el M.C.D. de:

$$B_{(x)} = 2x^2 + 12x + 18$$

$$C_{(x)} = 4x^2 + 4x - 24$$

- a)  $(x + 3)$       b)  $4(x+3)(x - 2)$   
 c)  $(x + 2)(x - 2)$       d)  $(x + 2)$   
 e)  $2(x + 3)$

10. Hallar el M.C.M. de:

$$2x^2 - 9x - 81; \quad x^2 - 36; \quad 4x^2 + 12x + 9$$

y dar como respuesta la suma de sus factores primos.

- a)  $x + 1$       b)  $2x + 3$       c)  $7x + 3$   
 d)  $7x - 3$       e)  $x - 1$

## Bloque II

11. Hallar el M.C.D. de:

$$P_{(x,y)} = x^3 - xy^2 + x^2y - y^3$$

$$F_{(x,y)} = x^3 - xy^2 - x^2y + y^3$$

- a)  $x + y$       b)  $x - y$   
 c)  $x^2 - y^2$       d)  $(x + y)(x - 3y)$   
 e)  $x^3 - y^3$

12. Hallar el M.C.M. de:

$$A_{(x,y)} = x^2 - y^2$$

$$B_{(x,y)} = x^2 - 2xy + y^2$$

$$C_{(x,y)} = x^2 + 2xy + y^2$$

- a)  $(x + y)^3$       b)  $(x - y)$       c)  $(x - y)^3$   
 d)  $(x^2 - y^2)^3$       e)  $(x^2 - y^2)^2$

13. El M.C.D. de:

- a)  $(x + 2)$       b)  $(x + 2)^2$       c)  $(x - 1)$   
 d)  $(x + 2)^3$       e)  $(x - 2)^2$

14. Si:  $(x - 1)$  es divisor de:

$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) \text{ y de } (x^3 - 7x + 6)$$

¿Cuál es el M.C.D.?

- a)  $(x^2 - 3x + 2)$       b)  $(x - 2)$   
 c)  $(x - 1)(x + 2)$       d)  $(x + 2)$   
 e)  $x^2 - 4$

15. Hallar el valor numérico del M.C.D. para:  $x = 3$ ; de los polinomios:

$$P_{(x)} = x^4 + 2x^2 - 3$$

$$Q_{(x)} = x^4 + x^3 - x^2 - x$$

$$R_{(x)} = x^3 - 7x - 6$$

- a) 1      b) 2      c) 3  
 d) 4      e) 8

16. Hallar el M.C.D. de:

$$P_{(x)} = (x + 1)^4 (x + 2)^3 (x - 3)^5 (x - 1)^2$$

$$F_{(x)} = (x + 8)^4 (x + 2) (x - 3)^5 (x - 2)^2$$

$$R_{(x)} = (x - 2)^2 (x + 2)^2 (x - 3) (x + 7)^6$$

- a)  $x + 2$       b)  $x^2 - x - 6$       c)  $x^2 + x - 6$   
 d)  $x - 3$       e)  $x + 8$

17. Hallar el M.C.M. de:

$$P_{(x,y,z)} = x^2y^7z^8$$

$$Q_{(x,y,z)} = x^4y^3z^9$$

$$S_{(x,y,z)} = x^5y^2z^{10}$$

- a)  $xyz$       b)  $x^5y^3z^4$       c)  $x^5y^7z^{10}$   
 d)  $x^2yz^{10}$       e) N.A.

18. Señale el M.C.D. de:

$$A_{(x)} = x^4 - 1$$

$$B_{(x)} = x^3 - 3x + 2$$

- a)  $x + 1$       b)  $x^2 + 1$       c)  $x - 1$   
 d)  $x - 2$       e)  $x + 2$

19. Hallar el M.C.D. de:

$$P_{(x)} = x^3 - 3x - 2$$

$$F_{(x)} = x^3 - 3x^2 + 4$$

$$A_{(x)} = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$$

$$B_{(x)} = x^3 + 3x^2 - 4$$

a)  $x^2 + x + 2$   
b)  $x^2 + x - 2$  c)  $x^2 -$   
x - 2  
d)  $x^2 - x + 2$  e)  $(x$   
 $+ 1)^2 (x - 2)^2$



## Autoevaluación

1. Hallar el M.C.D. de:

$$P_{(x, y, z)} = x^2 y^3 z^4$$

$$Q_{(x, y, z)} = x^4 y^2 z^6$$

$$R_{(x, y, z)} = x^2 y z^2$$

- a)  $x^2 y z^2$       b)  $x^4 y^3 z^6$       c)  $x^4 y^2 z^2$   
d)  $x y z$       e)  $xy^2z$

2. Hallar el M.C.D. de:

$$A_{(x)} = 3(x + 1)$$

$$B_{(x)} = 2(x^2 - x + 1)(x + 1)^2$$

$$C_{(x)} = 6x^3 + 6$$

- a)  $x - 1$       b)  $x^2 - x + 1$       c)  $x^3 + 1$   
d)  $x + 1$       e)  $6(x + 1)$

3. Hallar el M.C.M. de:

$$A_{(a, b)} = a^2 - b^2$$

$$B_{(a, b)} = a^2 + 2ab + b^2$$

$$C_{(a-b)} = a^2 - 2ab + b^2$$

- a)  $(a^2 - b^2)^2$       b)  $a - b$       c)  $a + b$   
d)  $a^2 + b^2$       e) N.A.

4. Hallar el M.C.D. de:

$$P_{(x, y)} = x^4 - y^4$$

$$R_{(x, y)} = x^4 + 2x^2 y^2 + y^4$$

- a)  $x^2 - y^2$       b)  $x + y$       c)  $x - y$   
d)  $x^2 + y^2$       e)  $x^2 + y^2 + 1$

5. Del problema anterior, hallar el M.C.M.

- a)  $x^2 y^2$       b)  $(x^2 + y^2)^2$   
c)  $x + y$       d)  $x - y$   
e)  $(x^2 + y^2)^2 (x^2 - y^2)$

## Claves

1. a  
2. d  
3. a

4. d
5. e

