

Cocientes Notables (C.N.)

... Recordemos algo sobre "Productos Notables":

Uno de los más conocidos es:

Diferencia de cuadrados $\Rightarrow a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Otro producto notable no menos conocido es:

Suma y Diferencia de cubos $\Rightarrow a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

¿Qué pasaría si, del lado derecho, pasamos a dividir el factor binómico al lado izquierdo?

... pues obtendríamos lo siguiente:

- $\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$
- $\frac{a^3 \pm b^3}{a \pm b} = a^2 \mp ab + b^2$

En ambos casos se obtienen expresiones denominadas **COCIENTES NOTABLES**.

Así por ejemplo, podemos tener:

$$\frac{a^6 - b^6}{a - b} = a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5$$

En general:

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}$$

Parte teórica

- **Cociente Notable.**- Son divisiones algebraicas entre binomios de la forma:

(*)..... $\frac{a^n \pm b^n}{a \pm b}$; con "n" ∈ IN

Aquí: "a" y "b" son denominadas "BASES" del Cociente Notable.

① $\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}$

② $\frac{a^n + b^n}{a + b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}$

\Rightarrow Aquí "n" debe ser IMPAR

③ $\frac{a^n - b^n}{a + b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + ab^{n-2} - b^{n-1}$

\Rightarrow Aquí "n" debe ser PAR

④ $\frac{a^n + b^n}{a - b} \Rightarrow$ Esta división no es exacta no obstante genera un cociente notable.

- **Número de términos.**- La cantidad de términos de un cociente notable es "n" (el exponente de la expresión *).

Ejemplo: Cuántos términos tiene el C.N.:

$$\frac{32x^5 - y^5}{2x - y}$$

Solución.- Primero, debemos darle la forma de la expresión en (*).

Observa: $\frac{32x^5 - y^5}{2x - y} = \frac{[2x]^5 - [y]^5}{2x - y}$

Luego: n = 5. Por lo tanto, el C.N. tiene cinco términos.

- **Término k-ésimo.**- Si en un desarrollo de algún C.N. queremos calcular el término de lugar "k" aplicamos la fórmula:

Esta fórmula se aplica al C.N. ①

$T_k = a^{n-k} \cdot b^{k-1}$

ó

Esta fórmula se aplica al C.N. ② y ③

$T_k = a^{n-k} \cdot (-b)^{k-1}$

Todo Cociente Notable tiene un desarrollo. Observa:

En nuestro caso, trabajaremos principalmente con C.N. del tipo 1 , cuyos términos del desarrollo son todos positivos.



Problemas resueltos

1. Desarrollar el siguiente cociente notable e indicar el número de términos:

$$\frac{x^7 - y^7}{x - y}$$

Resolución:

$$\frac{x^7 - y^7}{x - y} = x^6 + x^5y + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6$$

el desarrollo contiene siete términos

2. Desarrollar el siguiente cociente notable:

$$\frac{x^{10} - y^{15}}{x^2 - y^3}$$

Resolución:

$$\begin{aligned} \frac{x^{10} - y^{15}}{x^2 - y^3} &= \frac{(x^2)^5 - (y^3)^5}{(x^2) - (y^3)} = \\ &= (x^2)^4 + (x^2)^3(y^3)^1 + (x^2)^2(y^3)^2 + (x^2)^1(y^3)^3 + (y^3)^4 \\ &= x^8 + x^6y^3 + x^4y^6 + x^2y^9 + y^{12} \end{aligned}$$

Observación: Al desarrollar, observamos que los exponentes de "x" disminuyen de dos en dos, mientras que los exponentes de "y" aumentan de tres en tres.

3. Desarrollar el siguiente cociente notable:

$$\frac{x^{24} - y^{18}}{x^4 - y^3}$$

Resolución:

De acuerdo al problema anterior; los exponentes de "x" disminuyen de cuatro en cuatro, mientras que los exponentes de "y" aumentan de tres en tres.

$$\begin{aligned} \frac{x^{24} - y^{18}}{x^4 - y^3} &= \frac{(x^4)^6 - (y^3)^6}{(x^4) - (y^3)} = \\ &= x^{20} + x^{16}y^3 + x^{12}y^6 + x^8y^9 + x^4y^{12} + y^{15} \end{aligned}$$

4. ¿Qué valor debe tomar "n" para que:

$$\frac{x^{6n+1} - y^{5n}}{x^{2n-3} - y^n}$$

genere un cociente notable?

Resolución:

Genera un cociente notable si:

$$\frac{6n + 1}{2n - 3} = \frac{5n}{n}$$

$$\frac{6n + 1}{2n - 3} = 5$$

$$\begin{aligned} \rightarrow 10n - 15 &= 6n + 1 \\ 4n &= 16 \\ n &= 4 \end{aligned}$$

5. Del siguiente cociente notable:

$$\frac{x^{20} - y^{30}}{x^2 - y^3}$$

calcular el término de lugar seis.

Resolución:

$$\frac{x^{20} - y^{30}}{x^2 - y^3} = \frac{(x^2)^{10} - (y^3)^{10}}{(x^2) - (y^3)}$$

por fórmula: $T_k = a^{n-k} \cdot b^{k-1}$

$$\begin{aligned} \text{piden } T_6: T_6 &= (x^2)^{10-6} (y^3)^{6-1} \\ T_6 &= (x^2)^4 (y^3)^5 \\ T_6 &= x^8 y^{15} \end{aligned}$$

Bloque I

Calcular el desarrollo de los siguientes C.N.:

1. $\frac{x^4 - y^4}{x - y}$

7. $\frac{81 - x^{12}}{3 - x^3}$

2. $\frac{a^6 - 2^6}{a - 2}$

8. $\frac{32x^{10} - 1}{2x^2 - 1}$

3. $\frac{x^5 - 2^5}{x - 2}$

9. $\frac{x^{30} - 64y^{12}}{x^5 - 2y^2}$

4. $\frac{[2x]^7 - 1}{2x - 1}$

10. $\frac{625x^{12} - 81y^8}{5x^3 - 3y^2}$

5. $\frac{x^4 - 625}{x - 5}$

11. $\frac{256n^{28} - m^{12}}{2^2 n^7 - m^3}$

6. $\frac{128 - n^7}{x - 5}$

12. $\frac{x^{30} y^{18} - 64}{x - 5}$

$2 - n$

$x^5 y^3 - 2$

Problemas para la clase

Bloque II

1. Uno de los términos de: $\frac{x^{12} - 81}{x^3 - 3}$; es:

- a) $9x$ b) $3x^3$ c) x^3
d) $9x^3$ e) x^{27}

2. Indicar uno de los términos al desarrollar:

$$\frac{16x^{20} - 1}{2x^5 - 1}$$

- a) $4x^5$ b) $2x^4$ c) $4x^{15}$
d) $2x^{10}$ e) $8x^{15}$

3. Dado:

$$\frac{\frac{16}{81}a^{16} - 1}{\frac{2}{3}a^4 - 1}$$

indicar el coeficiente del tercer término.

- a) $\frac{16}{81}$ b) 1 c) $\frac{2}{3}$
d) $\frac{4}{9}$ e) $\frac{8}{27}$

4. Si tenemos:

$$\frac{27x^{12} - 1}{\sqrt[3]{3x^2 - 1}}$$

indicar el coeficiente del segundo término.

- a) $3\sqrt[3]{3}$ b) 3 c) 27
d) $\sqrt[3]{3}$ e) 9

5. ¿Cuántos términos tiene el C.N.:

$$\frac{[x^2]^6 - y^{60}}{x - y^5} ?$$

- a) 2 b) 6 c) 12
d) 5 e) 60

6. ¿Cuántos términos tiene el desarrollo de:

$$\frac{\left\{ \left[8x^6 \right]^5 \right\}^2 - 1}{4x^4 - 1} ?$$

- a) 2 b) 30 c) 5
d) 15 e) 6

7. Indicar el número de términos de:

$$\frac{(27x^{15})^4 - 1}{9x^{10} - 1}$$

- a) 2 b) 6 c) 5
d) 4 e) 60

8. ¿Cuál es el tercer término de: $\frac{x^{10} - y^5}{x^2 - y}$?

- a) x^2y^2 b) x^3y c) xy^3
d) x^2y^4 e) x^4y^2

10. Indicar el sexto término de: $\frac{256x^{16} - y^8}{2x^2 - y}$

- a) $4x^2y^5$ b) $8x^2y^5$ c) $2x^4y^5$
d) $4x^4y^5$ e) $4x^4y^{10}$

Bloque III

1. Desarrollar el C.N.:

$$\frac{x^5 - y^5}{x - y}$$

indicar uno de los términos.

- a) x^4y b) xy^3 c) y^5
b) $x + y$ e) $-xy^3$

2. Desarrollar el C.N.:

$$\frac{x^3 - y^3}{x - y}$$

indicar el producto de todos sus términos.

- a) xy b) xy^3 c) x^3y^2
d) x^3y e) x^3y^3

3. Indique el cuarto término al desarrollar:

$$\frac{x^{30} - y^{45}}{x^2 - y^3}$$

- a) xy^{11} b) x^9y^{22} c) $x^{12}y^9$
d) $x^{11}y^9$ e) $x^{22}y^9$

4. ¿Cuántos términos tiene el desarrollo de:

$$\frac{a^{105} - b^{63}}{a^5 - b^3} ?$$

- a) 20 b) 21 c) 22
d) 23 e) 24

5. Indicar el número de términos del siguiente Cociente Notable:

$$\frac{x^{30} - y^{20}}{x^3 - y^2}$$

- a) 5 b) 10 c) 15
d) 20 e) 25

6. Para qué valor de "n", la división:

$$\frac{x^{n^2} - y^{64}}{x^{27} - y^n}$$

genera un Cociente Notable

- a) 9 b) 12 c) 15
d) 18 e) no existe "n"

7. Indicar si es verdadero (V) o falso (F):

I. $\frac{x^5 + y^5}{x + y} = x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4$

II. $\frac{x^4 - y^4}{x + y} = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$

III. $\frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2$

- a) VVV b) VFV c) VFF
d) FFF e) FFV

8. Calcular el segundo término al desarrollar:

$$\frac{x^{12} - 81}{x^3 - 3}$$

- a) 3 b) $3x^4$ c) $3x^2$
d) $3x^9$ e) $3x^6$

9. Desarrollar el Cociente Notable:

$$\frac{x^7 - y^7}{x - y}$$

e indicar el término central.

- a) xy b) x^2y^2 c) x^3y^3
d) x^4y^4 e) x^5y^5

10. ¿Qué valor debe tomar "a" para que:

$$\frac{x^a - y^{5a-8}}{x^2 - y^9}$$

genere un Cociente Notable?

- a) 10 b) 12 c) 14
d) 16 e) 18

Autoevaluación

1. ¿Cuántos términos tiene:

$$\frac{\left[\left[x^2 \right]^6 \right]^3 - y^4}{x^9 - y} ?$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

2. Si tenemos el C.N. con su respectivo desarrollo:

$$\frac{16x^4 - y^4}{2x - y} = \underbrace{8x^3}_{1^{\text{er}} \text{ término}} + \underbrace{4xy}_{2^{\text{do}} \text{ término}} + \underbrace{2xy^2}_{3^{\text{er}} \text{ término}} + \underbrace{y^3}_{4^{\text{to}} \text{ término}}$$

¿En qué término se presenta un error?

- a) 1^{ro} b) 2^{do} c) 3^{ro}
d) 4^{to} e) Ninguno

3. ¿Cuántos términos tiene el C.N.: $\frac{256n^{16} - m^8}{2n^2 - m}$?

- a) 4 b) 6 c) 8
d) 3 e) 2

4. Indicar uno de los términos de:

$$\frac{243x^{10} - y^{30}}{3x^2 - y^6}$$

- a) $9xy^{20}$ b) $27x^4y^6$ c) $9x^8y^{36}$
d) $9x^4y^{12}$ e) y^{30}

5. Indicar el cuarto término de:

$$\frac{625x^{12} - a^{24}}{5x^3 - a^6}$$

- a) $25x^6a^6$ b) a^{18} c) $5x^3a^{12}$
d) a^6 e) $25x^3a^6$

