

Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo I

"TÍPICO"

Un matemático pasea por el campo, sin nada que hacer, aburrido. Encuentra a un pastor que cuida un numeroso rebaño de ovejas, y decide divertirse un poco a costa de él.

- Buenos días, buen pastor.
- Buenos días tenga usted.
- Solitario oficio, el de pastor, ¿no?
- Usted es la primera persona que veo en seis días.
- Estará usted muy aburrido.
- Daría cualquier cosa por un buen entretenimiento.
- Mire, le propongo un juego. Yo le adivino el número exacto de ovejas que hay en su rebaño, y si acierto, me regala usted una. ¿Qué le parece?
- Trato hecho.

El matemático pasa su vista por encima de las cabezas del ganado, murmurando cosas, y en unos segundos anuncia:

- 586 ovejas.

El pastor, admirado, confirma que ése es el número preciso de ovejas del rebaño. Se cumple en efecto el trato acordado, y el matemático comienza a alejarse con la oveja escogida por él mismo.

- Espere un momento, señor. ¿Me permitirá una oportunidad de revancha?
- Hombre, naturalmente.
- Pues ¿qué le parece, que si yo le acierto su profesión, me devuelva usted la oveja?
- De acuerdo.

El pastor sonríe, porque sabe que ha ganado, y sentencia:

- Usted es matemático.
- ¡Caramba! Ha acertado. Pero no acierto a comprender cómo, cualquiera con buen ojo para los números podría haber contado sus ovejas.
- Sí, sí, pero sólo un matemático hubiera sido capaz, entre 586 ovejas, de llevarse el perro.

¿No nos pasa a veces algo parecido que al matemático? En el examen, resolvemos la parte más difícil del problema, y por distraídos, por apurados, o por no haber leído bien, nos equivocamos en lo más fácil. ¡A poner más atención!

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M.C.D.)

Es el mayor de todos los divisores comunes de un grupo de números.

Ejemplo:

Dados los números 8; 12 y 20, ¿cuál es su máximo común divisor?

Divisores de 8 → ①; ②; ④; 8

Divisores de 12 → ①; ②; 3; ④; 6; 12

Divisores de 20 → ①; ②; ④; 5; 10; 20

Como ves, los divisores **comunes** de 8; 12 y 20 son: 1; 2 y 4, y de ellos, el **mayor** de todos es 4, por eso decimos que 4 es el Máximo Común Divisor de 8; 12 y 20. Esto se representa así:

$$\text{M.C.D.}(8; 12; 20) = 4$$

Ojo: El MCD debe ser entero positivo.

Propiedades

1. El MCD nunca es mayor que el menor de los números.
2. Si uno de los números es divisor de los otros, entonces es el MCD de todos ellos.
3. Si los números son PESI entonces el MCD de todos ellos es la unidad.

Ejercicios:

1. Completa el siguiente cuadro:

NÚMERO	DIVISORES
72	
38	
45	
36	
40	
32	
27	
18	
30	

Ahora, halla el MCD de los números pedidos usando lo que hemos aprendido.

NÚMEROS	DIVISORES COMUNES	MCD
36 y 27		
40 y 18		
38 y 30		
72 y 40		
45 y 30		
72 y 32		

2. Calcular el MCD de los siguientes números mentalmente. ¡Tú puedes!

NÚMEROS	5 y 3	6 y 3	12 y 4	7 y 8	18 y 3
MCD					

NÚMEROS	18 y 6	24 y 5	16 y 12	20 y 12	9 y 11
MCD					

NÚMEROS	12 y 25	13 y 14	32 y 12	30 y 18	45 y 20
MCD					

Métodos para hallar el MCD

Existen varios métodos, pero ahora vamos a trabajar con el método de DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA y su forma abreviada. Veámoslo con un ejemplo:

- Halle el MCD de 60; 24 y 36
 - Primero hagamos la descomposición canónica de los números mencionados:

$$\begin{array}{r|l}
 60 & 2 \\
 30 & 2 \\
 15 & 3 \\
 5 & 5 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad 60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

$$\begin{array}{r|l}
 24 & 2 \\
 12 & 2 \\
 6 & 2 \\
 3 & 3 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad 24 = 2^3 \times 3$$

$$\begin{array}{r|l}
 36 & 2 \\
 18 & 2 \\
 9 & 3 \\
 3 & 3 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad 36 = 2^2 \times 3^2$$

- Ahora tomemos los factores primos que aparezcan a la vez en todos los números, y pondremos el menor exponente que tengan.

$$\left. \begin{array}{l}
 2^2 \times 3 \times 5 \\
 2^3 \times 3 \\
 2^2 \times 3^2
 \end{array} \right\} 2^2 \times 3 = 12$$

↑
Éste es el
MCD(60; 24; 36)

- Podemos hacer lo mismo en forma abreviada, si descomponemos todos los números a la vez, pero solo tomando los factores que sean comunes a todos; así:

$$\begin{array}{r|l}
 60 - 24 - 36 & 2 \\
 30 - 12 - 18 & 2 \\
 15 - 6 - 9 & 3 \\
 5 - 2 - 3 & \\
 \hline
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 2 \\
 2 \\
 3
 \end{array} \right\} 2^2 \times 3 = 12$$

↑
MCD(60; 24; 36)

Problemas para la clase

* Calcula el MCD de los siguientes números por ambos métodos:

- | | | |
|----------------|----------------|----------------|
| a) 60 y 90 | c) 54; 80 y 64 | e) 18; 60 y 54 |
| b) 32; 40 y 50 | d) 35; 70 y 80 | |

* Actividad sugerida: Existen por lo menos dos formas más de hallar el M.C.D. de dos números (Ojo, sólo dos números) ¿Podrías averiguar cómo se hace alguna de ellas?

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (m.c.m.)

Es el menor de todos los múltiplos comunes de un grupo de números.

Ejemplo:

Dados los números 3; 4 y 6, ¿cuál es su mínimo común múltiplo?

- Múltiplos de 3 → 3; 6; 9; (12); 15; 18; 21; (24); ...
- Múltiplos de 4 → 4; 8; (12); 16; 20; (24); 28; ...
- Múltiplos de 6 → 6; (12); 18; (24); 30; 36; 42; ...

Múltiplos comunes de 3; 4 y 6 → (12); 24; 36; ...

∴ **12** es el mínimo común múltiplo de 3; 4 y 6

Se representa de la siguiente manera:
 $mcm(3; 4; 6) = 12$

Ojo: El mcm debe ser entero positivo.

Propiedades

- El mcm de un grupo de números nunca es menor que el mayor de los números.
- Si uno de los números es múltiplo de todos los otros, entonces es mcm de todos ellos.
- Si los números son PESI dos a dos, entonces el mcm de todos ellos es su producto.

Actividades para la clase

- Completa el siguiente cuadro:

NÚMERO	MÚLTIPLOS (diez primeros)
6	
8	
12	
15	
18	
16	
20	
24	
32	
36	

Ahora, halla el mcm de los números pedidos, aplicando lo que hemos aprendido.

NÚMEROS	MÚLTIPLOS COMUNES	mcm
6 y 8		
15 y 16		
16 y 8		
18 y 32		
15 y 20		
24 y 16		

- Calcula mentalmente el mcm de los siguientes números, ¡es fácil!

NÚMEROS	5 y 3	6 y 2	12 y 4	7 y 8	3 y 4
mcm					

NÚMEROS	18 y 3	18 y 6	3 y 9	6 y 7	10 y 5
mcm					

NÚMEROS	17 y 3	6 y 8	2 y 11	4 y 10	6 y 3	9 y 10
mcm						

Métodos para hallar el mcm

Tal como en el MCD, trabajaremos con el método de DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA y su forma abreviada.

Ejemplo:

Halle el mcm de 12; 20 y 30

- Descomposición canónica:

$$\begin{array}{l|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 12 = 2^2 \times 3$$

$$\begin{array}{l|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad 20 = 2^2 \times 5$$

$$\begin{array}{l|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad 30 = 2 \times 3 \times 5$$

- Ahora pondremos todos los factores primos que

aparezcan aunque sea sólo una vez, y les pondremos el mayor exponente que tengan.

$$\left. \begin{array}{l}
 2^2 \times 3 \\
 2^2 \times 5 \\
 2 \times 3 \times 5
 \end{array} \right\} 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

\uparrow
 Éste es el
 mcm(12; 20; 30)

- Podemos hacer lo mismo en forma abreviada, esta vez tomando todos los factores, así:

$$\begin{array}{r|l}
 12 & 2 \\
 20 & 2 \\
 30 & 3 \\
 6 & 2 \\
 10 & 2 \\
 15 & 3 \\
 3 & 3 \\
 5 & 5 \\
 15 & 3 \\
 1 & 5 \\
 5 & 5 \\
 1 & 5 \\
 1 & 5 \\
 1 & 5
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 2 \\
 2 \\
 3 \\
 2 \\
 2 \\
 3 \\
 3 \\
 5 \\
 3 \\
 5 \\
 5 \\
 5 \\
 5 \\
 5
 \end{array} \right\} 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

\uparrow
 mcm(12; 20; 30)

Ejercicios

* Calcula el mcm de los siguientes números por ambos métodos.

- a) 60 y 90
- b) 32; 40 y 50
- c) 54; 80 y 64
- d) 18; 64 y 72
- e) 35; 70 y 80

Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo II

"PERDIDOS EN GLOBO"

Dos aeronautas viajan en globo. Un fuerte viento les arrastra durante muchas horas, y se encuentran perdidos. Hacen descender su aerostato en un prado, y, sin apearse del mismo, le preguntan a la única persona que encuentran por allí:

- Perdona, buen hombre, ¿dónde nos encontramos?

El lugareño lo piensa un rato y responde:

- En un globo.

Entonces uno de los aeronautas le dice al otro:

- Vámonos de aquí a preguntarle a otro, porque este sujeto quiere burlarse de nosotros.
- ¡No, hombre, no es eso! Lo que pasa es que es matemático.
- ¿Qué es qué? ¿De dónde has sacado semejante conclusión?
- Muy simple: porque le hemos hecho una pregunta tan sencilla que cualquier persona normal podría haberla respondido inmediata y eficazmente, pero él la ha pensado largamente, y al final nos ha dicho algo totalmente cierto, absolutamente exacto, pero que ya sabíamos, y que además no nos sirve para nada.

Es clásico entre los alumnos escuchar frases como éstas: "Pero, ¿y eso de qué me va a servir más adelante?", "Eso sólo sirve para el examen", etc.

APLICACIONES DEL MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M.C.D.) Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (m.c.m)

Para aplicar M.C.D. y m.c.m. a problemas sólo debes recordar qué es m.c.m. y M.C.D., y sus principales propiedades. Conviene añadir una propiedad muy importante:

Tomemos dos números cualesquiera, por ejemplo 6 y 10. Hallemos su m.c.m. y su M.C.D.

$$\begin{aligned} \text{M.C.D. (6; 10)} &= 2 \\ \text{m.c.m. (6; 10)} &= 30 \end{aligned}$$

Observa que: $2 \times 30 = 6 \times 10$; esto siempre se cumple para dos números (haz la prueba), así que podremos decir lo siguiente:

Para dos números enteros y

positivos A y B se cumple que:
 $\text{M.C.D. (A, B)} \times \text{m.c.m. (A, B)} = A \times B$

➔ Problemas resueltos

1. ¿Cuál es el menor número tal que al dividirlo por 4; 5 y 6 no deja residuo?

Para que un número, al dividirse por otro, no deje residuo, la división debe ser exacta; por lo tanto, el número que buscamos, al ser dividido por 4, por ejemplo, dará una división exacta, lo que quiere decir que el número debe ser múltiplo de 4; lo mismo para 5 y 6, por lo que el número debe ser múltiplo a la vez de 4; 5 y 6, y como piden el menor, ese será el m.c.m., por tanto:

$m.c.m.(4; 5; 6) = 60$, que es el número pedido

2. ¿Cuál es el m.c.m. de dos números, cuyo producto es 40 y cuyo M.C.D. es 2?

No olvides que el producto de dos números es igual al de su M.C.D. por su m.c.m.; de acuerdo a los datos que tenemos, el m.c.m. es un número que multiplicado por 2 (el M.C.D.) debe dar 40 (el producto de los dos números), y ese número es: $40 \div 2 = 20$, que es el m.c.m. buscado.

3. En una bolsa hay 30 galletas de soda, 36 de vainilla y 42 de chocolate. Si las reparto entre mis amigos de tal manera que a cada uno le toque la misma cantidad de galletas de cada clase, ¿a cuántos amigos como máximo les podré repartir las galletas, sin que sobren ni falten galletas?

Fíjate que debo repartir las 30 galletas de soda (por ejemplo) entre mis amigos, y para que a todos les toque la misma cantidad, sin sobrar ni faltar, debo tener tantos amigos que pueda dividir las 30 galletas exactamente, es decir, el número de amigos que tengo es DIVISOR de 30; lo mismo se aplica para las 36 de vainilla y las 42 de chocolate. Conclusión: el número de amigos que tengo es divisor común de 30; 36 y 42, y como quiero la máxima cantidad, será el M.C.D., por ello:

$M.C.D.(30; 36; 42) = 6$ son los amigos que tengo

Problemas para la clase

Nivel I

- ¿Cuál es el mayor número posible, tal que al dividir a 36; 45 y 60 nos da siempre resto igual a cero?
a) 6 b) 2 c) 3
d) 5 e) 4
- ¿Cuál es el menor número posible que al dividir a 20; 35 y 42, resulta que siempre la división es exacta?
a) 1 b) 2 c) 4
d) 5 e) No hay
- Para llenar una tina, se extrae el agua de un estanque; Julio puede llenar la tina sacando agua con un balde de 3 litros, siempre lleno, sin que le sobre ni le falte agua; María puede hacer lo mismo, pero con un balde de 4 litros. ¿Cuántos litros de agua tiene la tina, si es lo más pequeña posible?
a) 2 litros b) 3 c) 6
d) 12 e) 18
- ¿Cuál es la menor capacidad posible de un tanque de agua, si un caño lo llena a 45 litros por minuto, y otro, por separado, a 36 litros por minuto, y en cada caso lo hace en un número exacto de minutos?
a) 90 litros b) 70 c) 120
d) 180 e) 360
- En el problema anterior, ¿en qué tiempo llenará el tanque el primer caño?
a) 4 minutos b) 2 c) 5
d) 8 e) 7
- ¿Cuál es el mayor divisor posible de 80 y 96, a la vez?
a) 4 b) 8 c) 6
d) 16 e) 2
- ¿Cuál es el mayor número que divide en forma exacta a 88 y 154?
a) 22 b) 11 c) 2
d) 4 e) 1
- Si tengo dos tablas, cuyas longitudes son 96 cm y 104 cm, y quiero partirlas en pedazos iguales, sin que sobre nada, y de tal forma que los pedazos sean lo más grandes posibles, ¿cuánto medirá cada pedazo?
a) 2 cm b) 4 c) 6
d) 8 e) 12

- En el problema anterior, ¿cuántos pedazos se obtienen en total?
a) 21 b) 22 c) 23
d) 24 e) 25
- En una caja hay 36 caramelos de menta, 90 caramelos de limón, y 60 caramelos de fresa. Si los reparto a mis amigos, de tal manera que a cada uno le toque el mismo número de caramelos de cada clase, ¿a cuántos amigos como máximo le podré repartir?
a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

Nivel II

- ¿Cuál es el mayor divisor común de 16×80 , y de 20×48 ?
a) 80 b) 320 c) 160
d) 40 e) 20
- ¿Cuál es el mayor divisor común de 25×42 , y de 35×54 ?
a) 10 b) 35 c) 70
d) 210 e) 420
- ¿Cuál es el producto del mcm y el MCD de los números 15; 65; 5 y 3?
a) 0 b) 65
c) 390 d) 195
e) No tienen MCD
- ¿Cuál es el producto del mcm y el MCD de los números 28 y 96?
a) 1 344 b) 2 688 c) 672
d) 336 e) 118
- El producto de dos números es 127 400, y su MCD es 14. ¿Cuál es su mcm?
a) 9 100 b) 18 200 c) 4 550
d) 27 300 e) 13 650
- Un alumno observador nota que cada 3 días pasa frente al colegio un vendedor de fruta, cada 6 días pasa un vendedor de helado, y cada 8 días pasa un vendedor de gaseosas. Si hoy pasaron todos juntos, ¿dentro de cuántos días como mínimo volverán a pasar otra vez los tres juntos?
a) 12 b) 8 c) 16
d) 24 e) 48

7. ¿Cuál es el menor número que al dividirlo entre 7; 5 y 4, siempre da residuo 2?. Da como respuesta la suma de sus cifras.
- a) Menos de 6 b) 6 c) 7
d) 8 e) Más de 8
8. Si el número de naranjas que tiene un vendedor se cuenta de 15 en 15, de 18 en 18, y de 24 en 24 siempre sobra 11. Hallar el número de naranjas, si es el menor posible.
- a) 360 b) 351 c) 371
d) 391 e) 350
9. Un comerciante tiene tres barriles de vino de 144; 180 y 216 litros, y se le ocurre repartir este vino en recipientes iguales, de la mayor cantidad posible cada uno, y que estén contenidos exactamente en los tres barriles. ¿Cuántos litros debe contener cada recipiente?
- a) 72 litros b) 36 c) 18
d) 24 e) 60
10. En el problema anterior, ¿cuántos recipientes debe usar?
- a) 12 b) 13 c) 14
d) 15 e) 16

Nivel III

1. El producto de dos números primos entre sí es 4 290, ¿cuál es su mcm?
- a) 2 145 b) 429 c) 1 430
d) 4 290 e) Faltan datos
2. ¿Qué número es tal que al dividirlo entre 4; 5 y 12, siempre da como residuo 3, si es que el número está entre 200 y 300?
- a) 223 b) 257 c) 247
d) 263 e) 243
3. ¿Qué número es tal que al dividirlo entre 6; 14; 15 y 4, siempre da como residuo 3, si es que el número está entre 3 000 y 3 500?. Da como respuesta la suma de sus tres últimas cifras.
- a) 10 b) 11 c) 12
d) 13 e) 14
4. Un profesor observó que si junta a los alumnos del salón en grupos de 6, sobran 4; si los agrupa de a 9, sobran 7; y si los junta de a 4, le sobran 2 ¿Cuántos alumnos hay en dicho salón, si no pasan de 40?
- a) 32 b) 33 c) 34
d) 35 e) 36
5. ¿Cuántos números, mayores que 500 y menores que 900, son divisibles por 9; 12; 15 y 18?
- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5
6. Al dividir un terreno rectangular en cuadrados iguales, se hizo de tal manera que el lado de cada cuadrado sea de la mayor longitud posible, y sin que sobre terreno. Si el largo del terreno es de 810 m, y su ancho es de 684 m, ¿cuál es el área de cada uno de los cuadrados?
- a) 324 m² b) 400 c) 289
d) 36 e) 18
7. Con fichas rectangulares Pepito, Manolito y Luchito formaron rectángulos iguales y de la menor área posible. Si Pepito usó fichas de 6 cm x 20 cm; Manolito, de 10 cm x 16 cm y Luchito de 12 cm x 32 cm (la primera medida representa el ancho y la segunda representa el largo), ¿cuál fue el área del rectángulo?
- a) 1 720 cm² b) 2 610 c) 2 010
d) 1 212 e) 9 600
8. En el problema anterior, ¿cuántas fichas usó Pepito?
- a) 80 b) 56 c) 72
d) 60 e) 96
9. Según el problema 7, ¿cuántas fichas más usó Manolito que Luchito?
- a) 25 b) 35 c) 45
d) 15 e) 5
10. Elena visita a Samuel cada 5 días, a José cada 3 días, y a Alberto cada 4 días. La primera vez que le tocó visitar a todos ellos fue el 1 de abril. ¿Qué fecha caerá la segunda vez que volverá a visitar a todos?
- a) 1 de junio b) 2 de junio
c) 30 de mayo d) 29 de junio

e) 31 de mayo