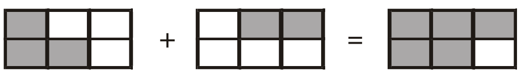
Operaciones con números fraccionarios

ADICIÓN EN NÚMEROS FRACCIONARIOS

a. De igual denominador

Para efectuar la suma o adición de dos o más fracciones con igual denominador, se suman los numeradores y se escribe el mismo denominador.

Veamos en forma gráfica:



$$\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

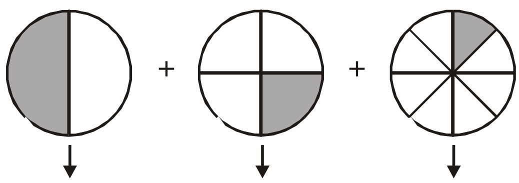
Ejemplo:

$$\frac{3}{17}+\frac{5}{17}+\frac{2}{17}=\frac{10}{17}$$

b. De diferente denominador

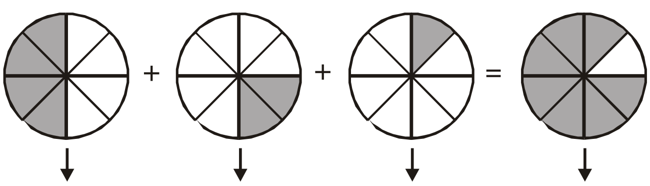
Para efectuar la suma o adición de fracciones de diferente denominador, buscamos transformar las fracciones a otras equivalentes, de tal forma que todas tengan ahora el mismo denominador.

Veamos un ejemplo gráfico:



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

Reducción a común denominador:



$$\frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

b.1. **Método del mínimo común múltiplo (m.c.m.)**

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{7}{20}$$

Hallamos el m.c.m. de los denominadores y lo escribimos como DENOMINADOR del resultado.

$$\begin{array}{l|l} 4 - 8 - 20 & 2 \\ 2 - 4 - 10 & 2 \\ 1 - 2 - 5 & 2 \\ 1 - 1 - 5 & 5 \\ 1 - 1 - 1 & \end{array} \qquad \text{m.c.m.} = 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 40$$

Entonces:

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{7}{20}=\frac{\boxed{}}{40}$$

Dividimos el m.c.m. por cada denominador y el resultado lo multiplicamos por el respectivo numerador.

Luego:

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{7}{20}=\frac{10+15+14}{40}=\frac{39}{40}$$

b.2. **Regla de productos cruzados**

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}$$

Ejemplo:

$$\frac{3}{4}+\frac{7}{11}=\frac{33+28}{44}=\frac{61}{44}=1\frac{17}{44}$$

SUSTRACCIÓN EN NÚMEROS FRACCIONARIOS

Efectuar la SUSTRACCIÓN de números racionales equivale a efectuar la ADICIÓN de uno de ellos con el opuesto del otro.

Ejemplo: $\frac{2}{5}-\frac{3}{11}$

- Esta sustracción también se puede escribir así:

$$\frac{2}{}+\frac{-3}{}$$

- Ahora aplicamos la REGLA DE LOS PRODUCTOS CRUZADOS

$$\frac{2}{5}+\frac{-3}{11}=\frac{22+(-15)}{55}=\frac{22-15}{55}$$

$$\therefore \frac{2}{5}-\frac{3}{11}=\frac{7}{55}$$

MULTIPLICACIÓN EN NÚMEROS FRACCIONARIOS

El numerador final es el resultado de multiplicar los numeradores, el denominador final es el resultado de multiplicar los denominadores.

Es decir:

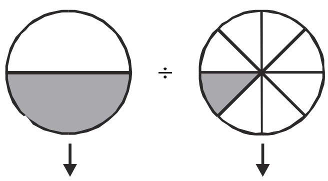
$$\boxed{\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}}$$

Ejemplo:

$$\frac{3}{5}\times\frac{2}{7}\times\frac{2}{5}=\frac{3\times2\times2}{5\times7\times5}=\frac{12}{175}$$

DIVISIÓN EN NÚMEROS FRACCIONARIOS

Observa el dibujo y reflexiona sobre la pregunta: ¿Cuántas veces cabe 1/8 en 1/2? Se trata de dividir 1/2 entre 1/8?



$$\frac{1}{2}\div\frac{1}{8}=\frac{1\times8}{2\times1}=\frac{8}{2}=4$$

Es decir, que 1/8 cabe cuatro veces en 1/2

Dividir una fracción "a/b" por otra NO NULA "c/d" equivale a multiplicar la primera fracción "a/b" por la inversa de la segunda "c/d".

Es decir:

$$\boxed{\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}}$$

Ejemplo:

$$\frac{36}{5}\div\frac{9}{8}=\frac{36}{5}\times\frac{8}{9}=\frac{32}{5}$$

POTENCIACIÓN EN NÚMEROS FRACCIONARIOS

La potencia de una fracción es el resultado de multiplicar "n" veces una misma fracción.

Así:

$$\underbrace{\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\ldots\times\frac{a}{b}}_{\text{"n" veces } \frac{a}{b}}=\text{Potencia "n"–ésima}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^n=P$$

Donde:

- "n" es exponente natural
- $\frac{a}{b}$ es base racional o fracción
- "P" es la potencia o resultado de la operación POTENCIACIÓN

Ejemplo:

$\left(\frac{3}{4}\right)^3$ significa que la base racional $\frac{3}{4}$ debe ser multiplicada por sí misma tres veces.

Es decir:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3\times3\times3}{4\times4\times4}=\frac{3^3}{4^3}=\frac{27}{64}$$

Luego podemos afirmar de modo general que:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}}$$

Signos de una potencia de base racional

$$\left(\frac{+2}{3}\right)^2=\frac{(+2)\times(+2)}{3\times3}=\frac{+4}{9}$$

Una potencia de base POSITIVA y exponente PAR o IMPAR, siempre es positiva.

$$\left(\frac{+2}{3}\right)^3=\frac{(+2)\times(+2)\times(+2)}{(3)}=\frac{+8}{}$$

$3 \times 3 \times 3$ 27

$$\left(\frac{-2}{5}\right)^4 = \frac{(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)}{5\times5\times5\times5} = \frac{+16}{625}$$

Una potencia de base NEGATIVA puede ser: POSITIVA, si el exponente es PAR

NEGATIVA, si el exponente es IMPAR

$$\left(\frac{-2}{5}\right)^3 = \frac{(-2)\times(-2)\times(-2)}{5\times5\times5} = \frac{-8}{125}$$

Propiedades

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \times \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m\times n}$$

Ejemplo:

$$\left[\left(\frac{5}{9}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{5}{9}\right)^{2\times3} = \left(\frac{5}{9}\right)^6$$

$$\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \times \left(\frac{c}{d}\right)^n$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^m}{} = \left(\frac{a}{}\right)^{m-n}$$

RADICACIÓN EN NÚMEROS FRACCIONARIOS

Hemos estudiado que dada la siguiente expresión:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = P$$

La operación que permite el cálculo de la base "$\frac{a}{b}$" dados "P" y "n", se llama RADICACIÓN.

Es decir:

$$\sqrt[n]{P} = \frac{a}{b} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^n = P$$

Donde:
- P : Radicando
- n : Índice ($n \geq 2$)
- $\frac{a}{b}$: Raíz
- $\sqrt{\ }$: Operador radical

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{3}{5} \quad ; \quad \text{porque: } \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$$

Signos de radicación en $\mathbb{Q}$

$$\sqrt[\text{impar}]{\frac{+a}{b}} = \frac{+c}{d} \quad ; \quad \text{Ejemplo: } \sqrt[3]{\frac{+8}{27}} = \frac{+2}{3}$$

$$\sqrt[\text{impar}]{\frac{-a}{b}} = \frac{-c}{d} \quad ; \quad \text{Ejemplo: } \sqrt[5]{\frac{-1}{32}} = \frac{-1}{2}$$

$$\sqrt[\text{par}]{\frac{+a}{b}} = \frac{+c}{d} \quad ; \quad \text{Ejemplo: } \sqrt{\frac{+9}{25}} = \frac{+3}{5}$$

$$\sqrt[\text{par}]{\frac{-a}{b}} = \nexists \text{ en } \mathbb{Q}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n} \qquad \left(b \right)$$

Ejemplo:

$$\frac{\left(\frac{5}{11}\right)^{6}}{\left(\frac{5}{11}\right)^{4}} = \left(\frac{5}{11}\right)^{6-4} = \left(\frac{5}{11}\right)^{2}$$

Propiedades

- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Ejemplo: $\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2}$

- $\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$

Ejemplo: $\sqrt[2]{\left(\frac{2}{5}\right)} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{\;}{2}} = \left(\frac{2}{5}\right)$

- $\sqrt[n]{\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \times \sqrt[n]{\frac{c}{d}}$

Ejemplo: $\sqrt[7]{\frac{1}{8} \times \frac{3}{5}} = \sqrt[7]{\frac{1}{8}} \times \sqrt[7]{\frac{3}{5}}$

- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{\frac{a}{b}}}} = \sqrt[mnp]{\frac{a}{b}}$

Ejemplo: $\sqrt[2]{\sqrt[5]{\sqrt[4]{\frac{2}{9}}}} = \sqrt[2\times5\times4]{\frac{2}{9}} = \sqrt[40]{\frac{2}{9}}$

Problemas para la clase

ADICIÓN

1. Efectuar las siguientes adiciones:

+	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{7}$
$\frac{2}{5}$		
$\frac{1}{5}$		

Indicar el mayor resultado.

a) $\frac{19}{29}$ b) $\frac{23}{20}$ c) $\frac{24}{35}$
d) $\frac{17}{35}$ e) N.A.

2. Calcular "A + B":

$$A = 3\tfrac{2}{3} + 2\tfrac{5}{6}$$
$$B = \frac{3}{5} + \frac{4}{11}$$

a) $10\frac{1}{2}$ b) $8\frac{49}{51}$ c) $7\frac{51}{110}$
d) $3\frac{4}{5}$ e) $9\frac{11}{50}$

3. Hallar el valor de "x + y"

$$6\tfrac{1}{5} = \frac{x}{5} + \frac{1}{5} \Rightarrow 6\tfrac{1}{5} = \frac{y}{5}$$

a) 61 b) 75 c) 40
d) 89 e) 41

4. Efectúe:

$$14\tfrac{1}{2} + 8\tfrac{2}{3}$$

a) $20\frac{1}{5}$ b) $23\frac{1}{6}$ c) $\frac{30}{31}$
d) $1\frac{3}{5}$ e) N.A.

5. Completar con los signos ">" o "<" según corresponda:

I. $\frac{3}{7} \;\square\; \frac{3}{8} + \frac{1}{5}$ II. $3\tfrac{2}{7} \;\square\; 3\tfrac{5}{6}$

III. $\frac{3}{5} + \frac{11}{12} \;\square\; 2\tfrac{11}{13}$ IV. $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} \;\square\; \frac{3}{4} + \frac{2}{7}$

a) <; <; <; < b) <; >; >; <
c) >; >; <; < d) >; <; >; <
e) >; >; >; >

SUSTRACCIÓN

6. Efectuar las siguientes sustracciones:

$-$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{21}$
$\frac{3}{5}$		
3		

7. Efectuar la siguiente operación:

$$3\frac{1}{5} - 2\frac{3}{4}$$

a) $\frac{9}{20}$ b) $\frac{3}{16}$ c) $\frac{1}{15}$

d) $\frac{3}{17}$ e) $\frac{5}{21}$

8. Calcular "A - B"

$$A = 19\frac{3}{8}$$

$$B = 13\frac{3}{4}$$

a) $\frac{40}{7}$ b) $\frac{45}{8}$ c) $\frac{52}{6}$

d) $\frac{54}{8}$ e) $5\frac{3}{8}$

9. Restar $5\frac{5}{8}$ de $7\frac{1}{3}$

a) $\frac{7}{19}$ b) $\frac{13}{15}$ c) $\frac{41}{24}$

d) $\frac{37}{51}$ e) $\frac{20}{21}$

10. De $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$ restar $\frac{1}{6}$

a) 2 b) 1 c) 4
d) 5 e) 0

MULTIPLICACIÓN

11. Completa el siguiente cuadro simplificando el resultado de la operación indicada.

$\times$	$\frac{7}{2}$	$\frac{14}{15}$	$\frac{-1}{2}$
$\frac{4}{5}$			
$\frac{-2}{7}$			

12. Calcular "$A \times B$"

$$A = \frac{2}{5}\times\frac{10}{3} \qquad B = \frac{1}{4}\times\frac{4}{9}\times 27$$

a) 4 b) 5 c) 6
d) 7 e) 8

13. Simplificar:

$$\left(3\frac{2}{7}\right)\times\left(\frac{5}{23}\right)\times\left(1\frac{3}{10}\right)$$

a) $\frac{21}{25}$ b) $\frac{12}{19}$ c) $\frac{5}{11}$

d) $\frac{13}{14}$ e) $\frac{1}{7}$

14. Si se sabe que:

$$A = \frac{4}{5}\times\left(1\frac{3}{8}\right)\times 2\frac{1}{2}$$

$$B = \frac{13}{15}\times\frac{5}{26}\times\frac{6}{7}$$

calcular "$A \times B$"

a) $\frac{5}{19}$ b) $\frac{7}{20}$ c) $\frac{11}{28}$

d) $\frac{13}{17}$ e) $\frac{11}{30}$

15. Simplificar:

$$\frac{-6}{90}\times\frac{36}{15}\times\frac{-12}{8}\times\frac{-3}{12}$$

— d) 15

a) $\frac{32}{35}$ — b) 10 21

−7 −3

e) 5

c) $\frac{-3}{50}$

DIVISIÓN

16. Complete el siguiente cuadro efectuando todas las divisiones señaladas.

$\div$	$\frac{11}{12}$	$-\frac{3}{8}$	-9
$\frac{9}{4}$			
$\frac{14}{21}$			

17. Escribir la expresión más simple equivalente a:

$$\frac{\frac{2}{13}}{\frac{5}{26}}$$

a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{7}{12}$ c) $\frac{8}{19}$

d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{4}$

18. Simplificar:

$$\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{13}{12}}$$

a) $\frac{7}{11}$ b) $\frac{11}{13}$ c) $\frac{21}{22}$

d) $\frac{17}{25}$ e) $\frac{23}{50}$

19. Simplificar:

$$\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}{\frac{5}{8}}$$

a) $\frac{13}{17}$ b) $\frac{11}{25}$ c) $\frac{7}{10}$

d) $\frac{5}{21}$ e) $\frac{1}{3}$

20. Reducir:

$$4-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{4}}}}$$

a) $2\frac{2}{3}$ b) $3\frac{1}{2}$ c) $2\frac{1}{2}$

d) $4\frac{1}{3}$ e) $3\frac{1}{3}$

POTENCIACIÓN

21. Escribe en los casilleros en blanco las potencias indicadas.

$\left(\frac{a}{b}\right)^n$	al cuadrado	al cubo	a la cuarta
$-\frac{1}{3}$			
$\frac{3}{5}$			
$\frac{1}{4}$			

22. Calcular "A × B", si:

$$A=\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \qquad B=\left(\frac{3}{5}\right)^3$$

a) $\frac{5}{99}$ b) $\frac{3}{125}$ c) $\frac{3}{25}$

d) $\frac{5}{48}$ e) $\frac{20}{51}$

23. Calcular el valor de "x" si:

$$\left(\frac{13}{15}\right)^2\left(\frac{13}{15}\right)^7\left(\frac{13}{15}\right)^3=\left(\frac{13}{15}\right)^x$$

a) 9 b) 15 c) 7
d) 12 e) 20

24. Calcular el valor del recuadro:

$$\left\{\left[\left(\frac{-5}{7}\right)^2\right]^3\right\}^4=\left(\frac{-5}{7}\right)^{\square}$$

a) 24 b) 25 c) 26
d) 27 e) 28

25. Efectuar:

$$\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{2} \times \left(\frac{27}{25}\right)^{-1}\right]^{4}$$

a) $\frac{1}{13}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{1}{81}$

d) $\frac{1}{27}$ e) $\frac{1}{5}$

RADICACIÓN

26. Halle el resultado de:

a) $\sqrt{\frac{81}{100}} = \square$ b) $\sqrt[3]{\frac{-1}{64}} = \square$

c) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \square$ d) $\sqrt[3]{\frac{1\,000}{27}} = \square$

e) $\sqrt{\frac{121}{144}} = \square$ f) $\sqrt[3]{-\frac{1}{216}} =$

27. Calcular:

$$\sqrt[8]{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{16}}}$$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{8}$

d) $\frac{1}{16}$ e) $\frac{1}{5}$

28. Simplificar:

$$\left[\frac{4}{9} \times \frac{1}{16} \times \frac{81}{100}\right]^{\frac{1}{2}}$$

a) $\frac{3}{7}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{20}$

d) $\frac{5}{16}$ e) $\frac{11}{13}$